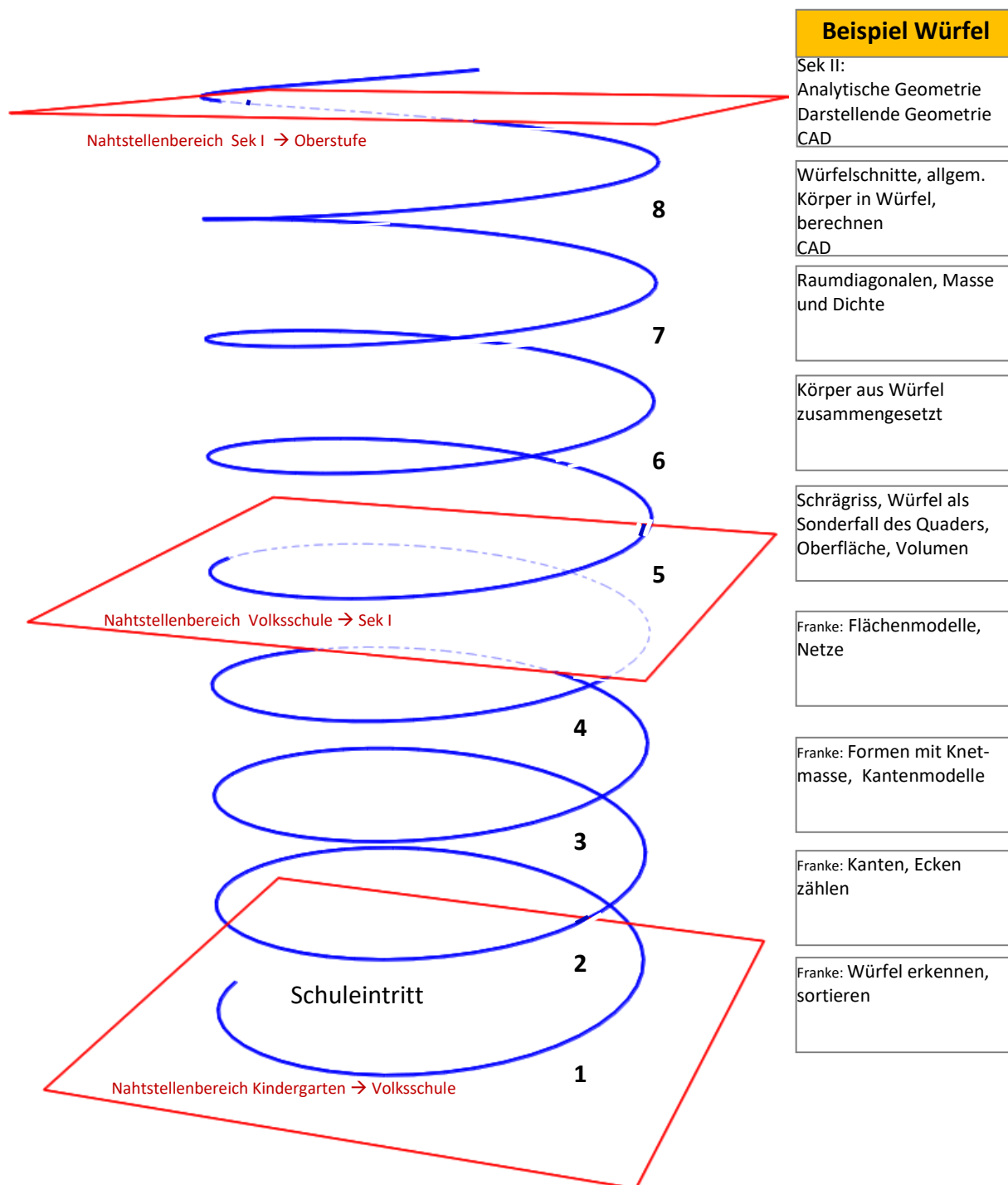


Vorweg ... das Spiralprinzip nach BRUNER

Konstruktive Aspekte begleiten den gesamten Geometrieunterricht, rechts am Themenkreis „Würfel“ konkretisiert.



Mit dem Spiralprinzip vertrat Jerome Seymour BRUNER (1915 - 2016) die These: Jedem Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lerngegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form nahegebracht werden.

Intuitive Vermittlung → altersgemäß wiederholen

Literatur:

FRANKE, Marianne: Didaktik der Geometrie (in der Grundschule). 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum, 2009

MÜLLER, Thomas: Schulmathematik Elementare und konstruktive Geometrie

Arbeitskriptum zur Lehrveranstaltung Universität Wien, WS 2017/18

Konstruktive Raumgeometrie

Konstruieren in anschaulichen Parallelrissen

Darunter versteht man in der aktuellen Schulbuchliteratur:

[PILLWEIN, G.; ASPERL, A.; WISCHOUNIG: Raumgeometrie Konstruieren und Visualisieren, OEBV, 2016; vgl. vor allem Abschnitt 4, p57 – p76]

- Körper konstruieren/anschaulich darstellen, Bilder ergänzen, Risslesen (Hauptrisse → Parallelriss, Parallelriss → Hauptrisse)
- Schnitte von Körpern ermitteln (z.B. Würfelsägeschnitte, Kegelschnitte)
- Beispiele der analytischen Geometrie konstruktiv lösen, Kontrollkonstruktionen anfertigen können
- Schatten bei Parallelbeleuchtung darstellen
- Reflexionen – Strahlengänge konstruieren

Arbeiten in zugeordneten Normalrissen (Grund- und Aufriss)

Exemplarisch werden folgende Konstruktionen vorgestellt und bearbeitet:

- Messen auf Strecken (**Maßaufgaben**): Ermittlung der wahren Länge, Abtragen von Längen, Neigungswinkel, Knickwinkel, Abbildung von rechten Winkeln
- Schneiden von Geraden und Ebenen (**Lagenaufgaben**)
- Darstellung von Kreisen und Kugeln

Raumvorstellung

Dieses Kapitel soll vor allem der Förderung der **Raumvorstellung** durch konstruktive Beschäftigung mit räumlichen Objekten dienen:

Def.: **Raumvorstellung** ist eine menschliche Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und zu denken.

RV ist bei den meisten Theorien über Intelligenz einer ihrer Hauptfaktoren, wird sie doch bei vielen Berufen als gut ausgebildet vorausgesetzt: Handwerker (Tischler, Mechaniker, ...), Mediziner (Röntgenbilder, CT, Ultraschallbilder, ...), Techniker (Architekten, Maschinenbauer, ...), Piloten ... eigentlich jede/r (Landkarten, Selbstbaumöbel, ...)

>>> Vgl. Poster zu einem Faktorenmodell der Raumvorstellung www.geometry.at/adi

>>> Ein freier Raumvorstellungstest für Schulen <http://www.adi3d.at/rif3d/>

Ein Teil der folgenden Aufgaben wird in einer sogenannten **Lernumgebung** bearbeitet:

Eine umfassende Einführung in LUs gibt z.B.: [HIRT, U; WÄLTI B.: Lernumgebungen im Mathematikunterricht Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte, Klett | Kallmeyer, 3. Aufl. 2012] Bisher bezieht sich der Begriff der Lernumgebungen der Literatur meist auf den Grundschulunterricht.

Eine LU für den Mathematikunterricht ist im gewissen Sinne eine natürliche Erweiterung dessen, was man eine „gute bzw. substanzielle Aufgabe“ nennt. [HIRT, WÄLTI 2012; p13]

Lernumgebungen ...

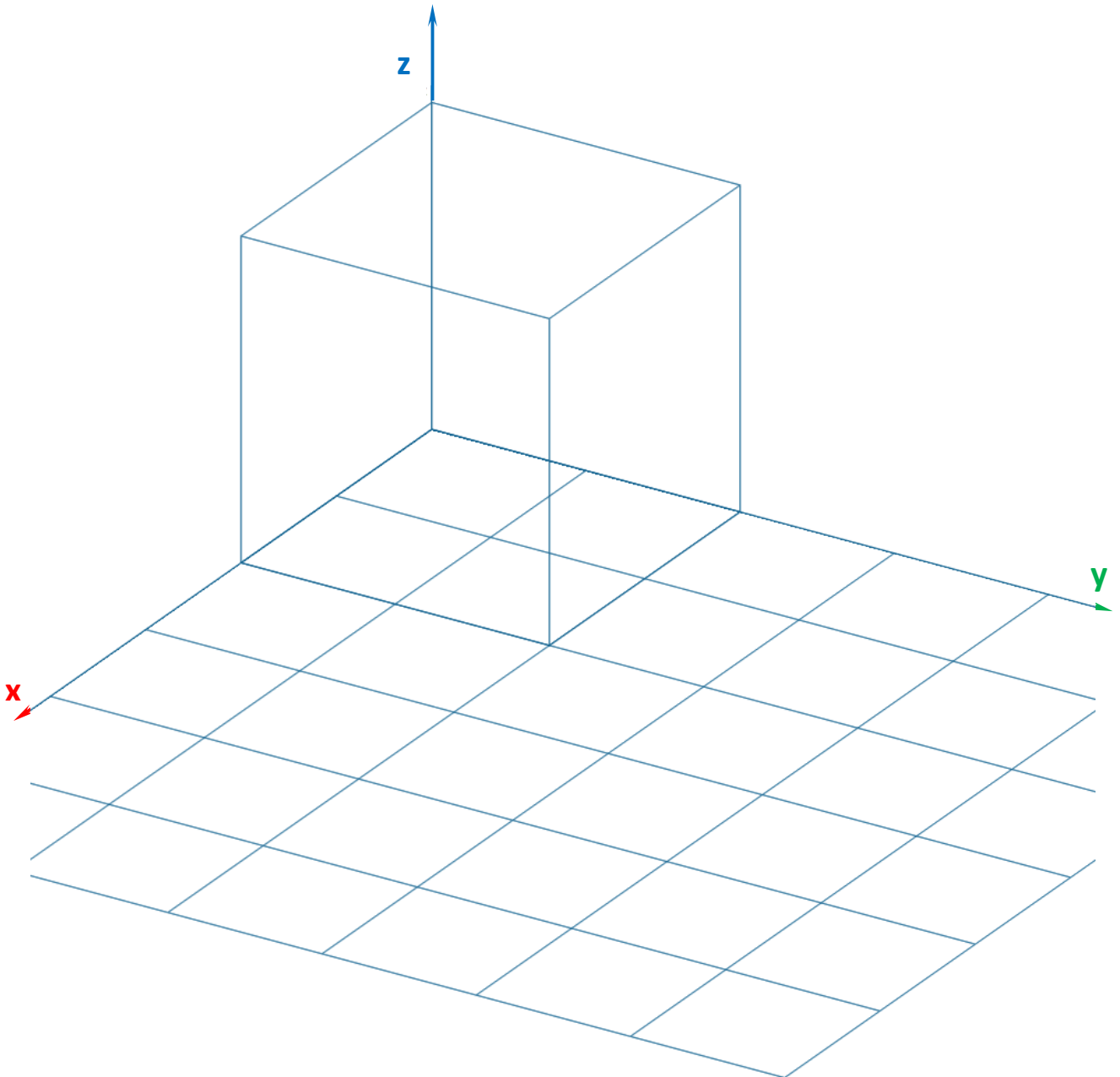
... präsentieren zentrale Ziele, Inhalte, Prinzipien des MU.

... bieten reiche Möglichkeiten für math. Aktivitäten von S&S.

... sind leicht an spezielle Gegebenheiten einer bestimmten Klasse anzupassen.

Konstruieren in der „Lernumgebung Würfel“

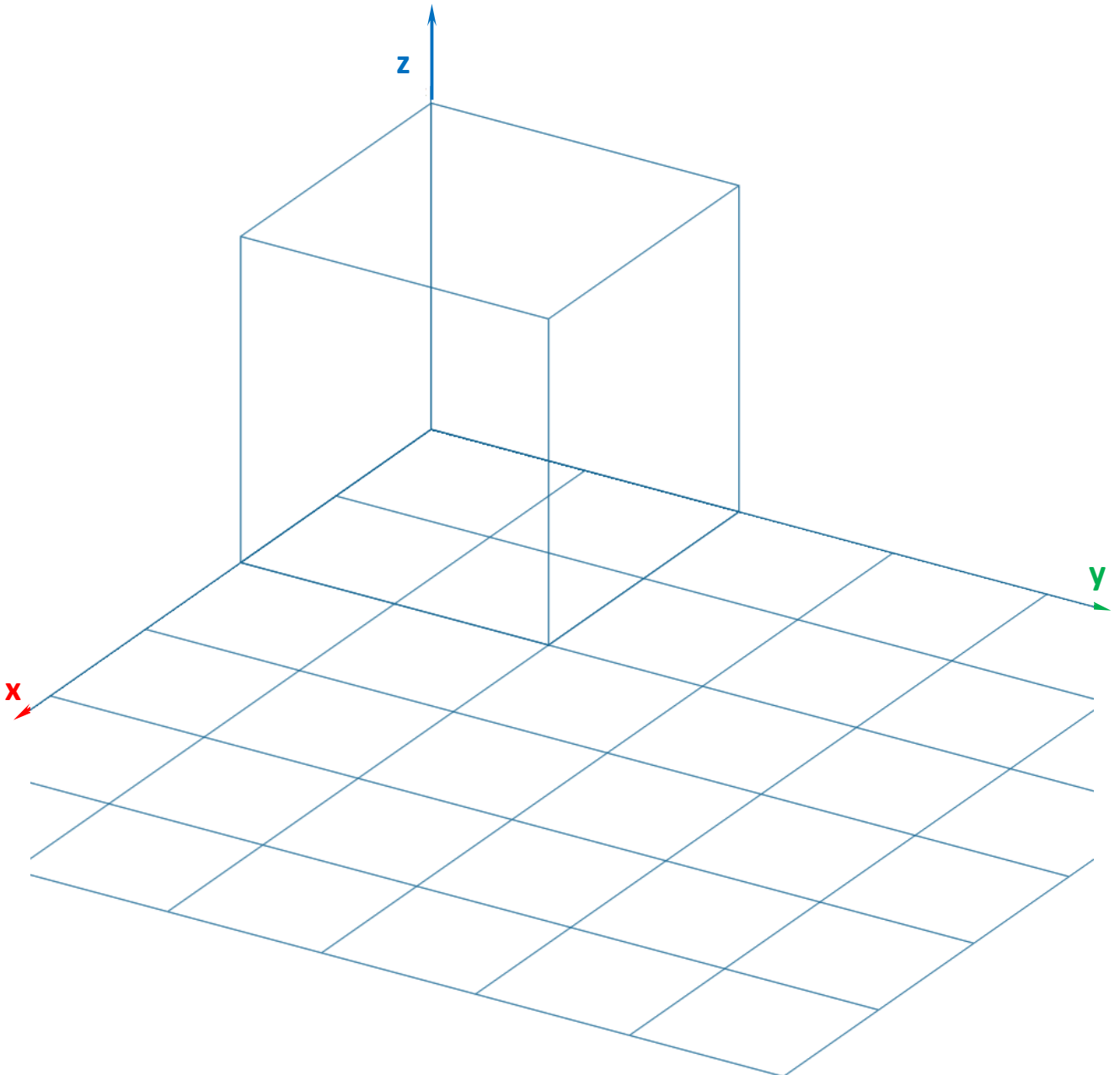
Der Parallelriss eines Würfels ist gegeben, konkret soll als Kantenlänge 5 Einheiten angenommen sein. Der Würfel ist mit dem Raumkoordinatensystem (U, x, y, z) in einfachster Weise verbunden. Drei Kanten liegen in den Achsen x , y und z . Das Quadrat mit der Kantenlänge 5 cm kann fallweise als Normalprojektion des Würfels (Grundriss oder Aufriss) gedeutet werden. Einfachheitshalber werden im Parallelriss die Hochindizes p für das Bild weggelassen. Durch die gewählten Achsenverzerrungen ($v_x = 0,7$, $v_y = v_z \approx 1$) können die Koordinaten der Angabe oder zu konstruierenden Punkte meist nachgemessen bzw. genau angegeben werden. Somit steht auch einer analytischen Bearbeitung der Aufgaben nichts im Wege. Die sichtbare Rasterung in der xy -Ebene ($2,5 \times 2,5$) erhöht die Vielfalt an Aufgabemöglichkeiten.



Lernumgebung Würfel

Aufgabe K1:

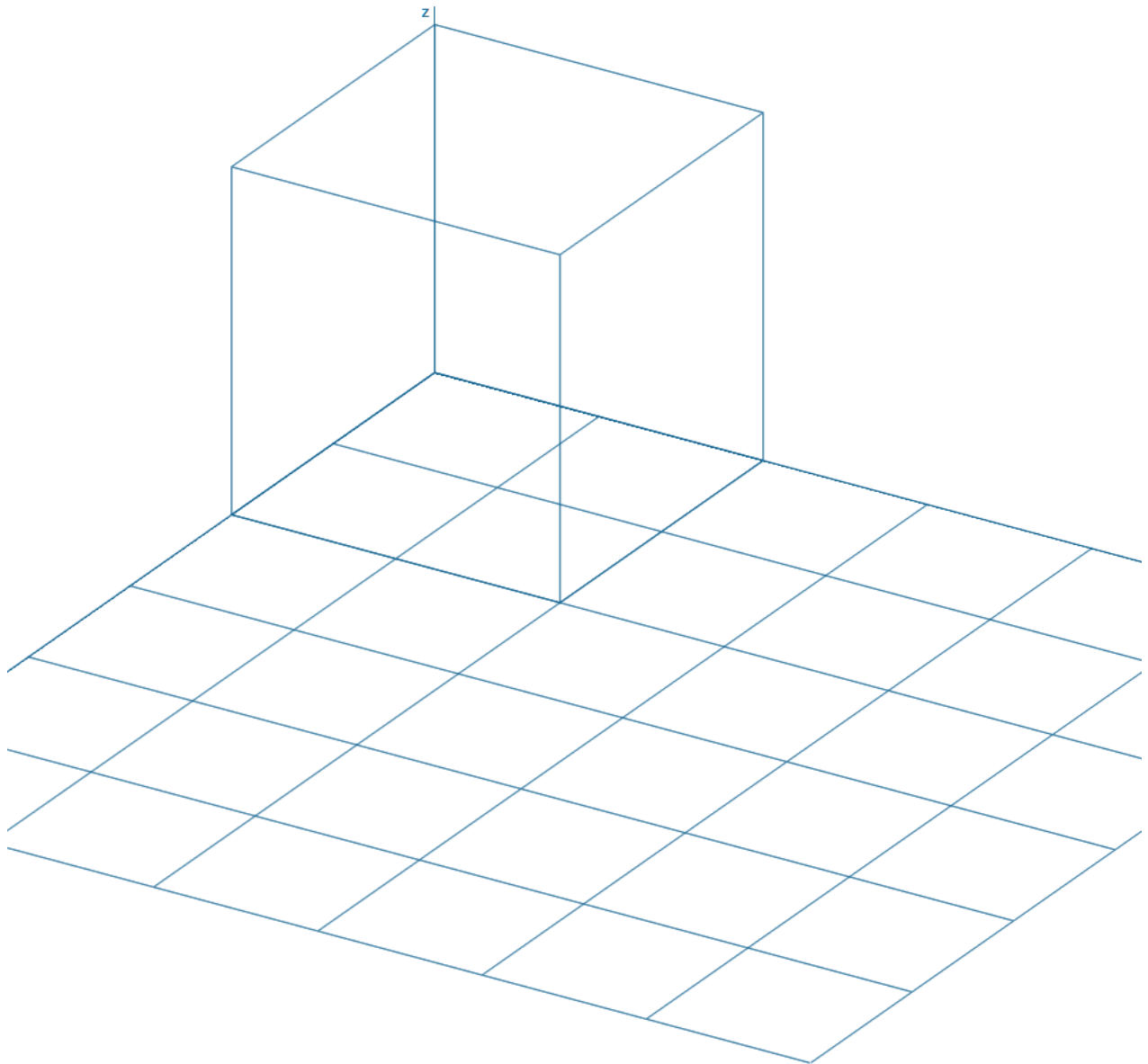
Tragen Sie die Punkte $A(2,5/2,5/5)$ und $B(2,5/7,5/2,5)$ ein und ermitteln Sie den Schnittpunkt der Strecke mit dem xz-parallelen Quadrat in der Ebene $y = 5$.



Aufgabe K2:

Zeichnen Sie die Gerade durch $A(5/5/3)$ und $B(0/5/5)$.

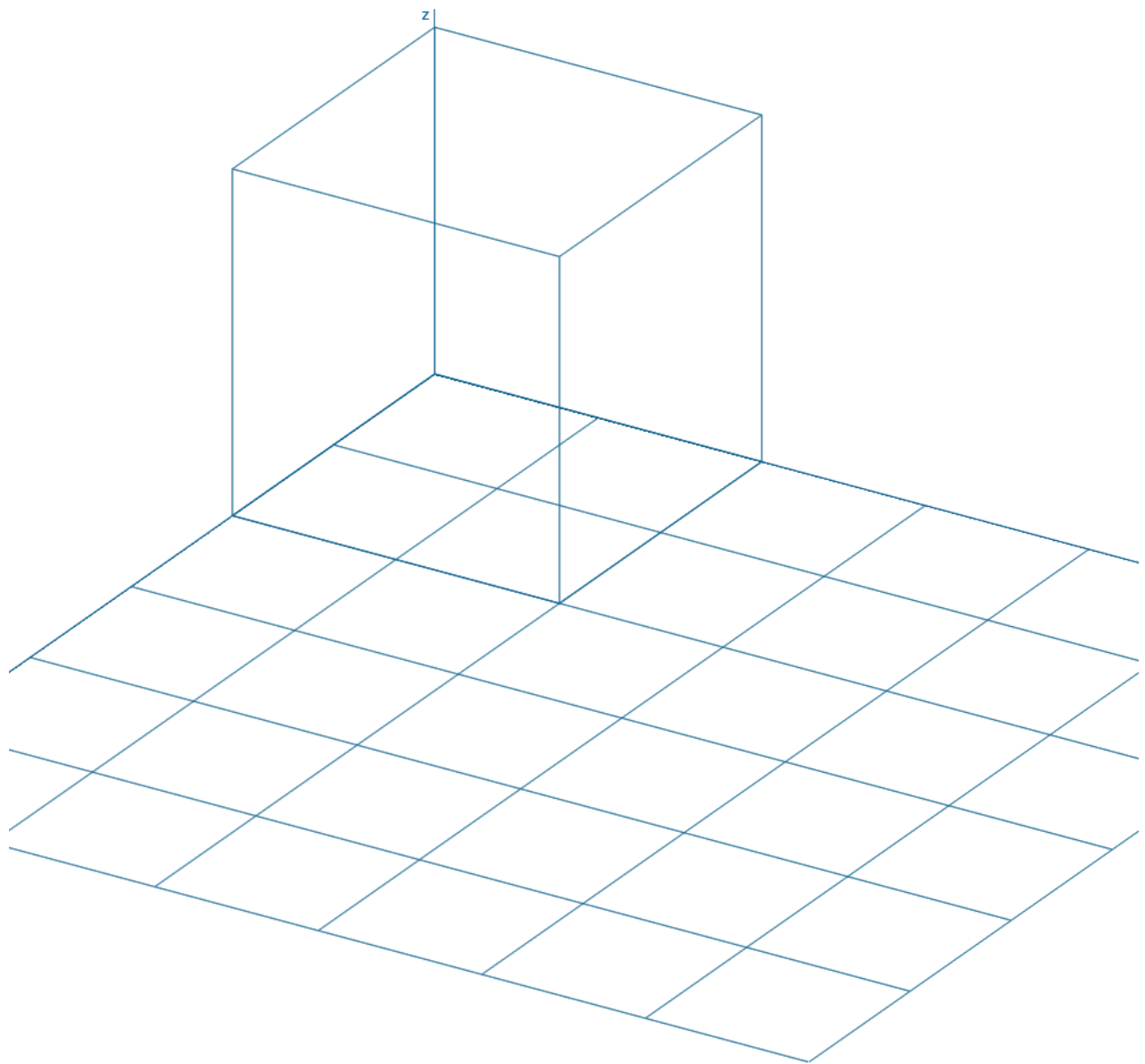
- Beschreiben Sie die Lage zu den drei Koordinatenebenen. Konstruieren und berechnen Sie den ersten und zweiten Spurpunkt (= Schnitt mit xy - bzw. yz -Ebene)
- Wie groß ist der erste Neigungswinkel? (= Winkel zwischen AB und der xy -Ebene)
- Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden durch $C(0/10/0)$, $D(2,5(2,5/2,5))$ mit den lotrechten Würfelflächen.



Aufgabe K3:

Konstruieren Sie das **Gemeinlot** der Geraden $g[A(5/5/3), B(0/5/5)]$ und $h[C(0/0/0), D(5/0/5)]$

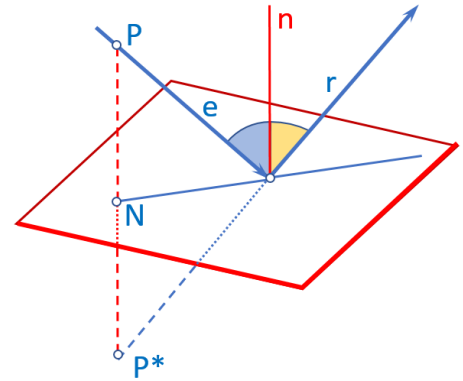
Darunter versteht man die Strecke mit dem kürzesten Abstand zwischen beiden Geraden. Diese muss normal auf beide Geraden stehen.



Reflexion

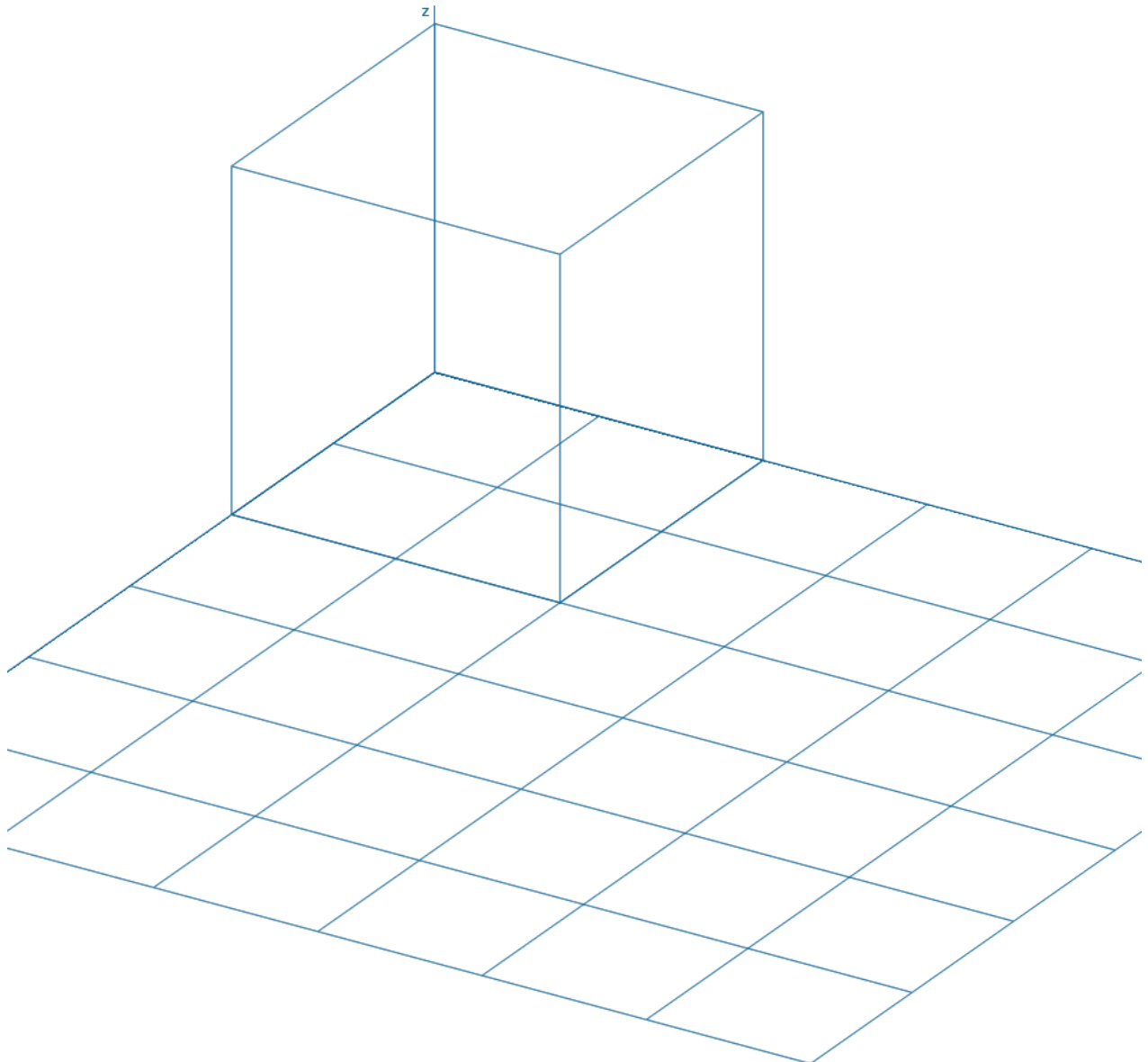
Vorbemerkung: Bei der Reflexion eines Lichtstrahls e an einer ebenen Fläche, liegen einfallender und reflektierter Strahl r in einer Normalebene zur Spiegelebene.

Physikalisch gilt die Regel „Winkel zum Lot = Winkel vom Lot“, konstruktiv hilft die Eigenschaft, dass es zu jedem Punkt P des einfallenden Strahls einen Punkt P^* des verlängerten reflektierten (ausgehenden) Strahls gibt, der symmetrisch bezüglich der Spiegelebene liegt. P^* kann auf Basis der Teilverhältnistreue einfach ermittelt werden, sobald man den Normalenfußpunkt N zur Verfügung hat.



Aufgabe 4:

Ein Lichtstrahl geht vom Würfeckpunkt $G(0/0/5)$ aus, trifft die xy -Ebene in **a) $S(5/7,5/0)$** **b) $T(5/0/0)$** und wird daran reflektiert. Konstruieren Sie jeweils den reflektierten Strahl.



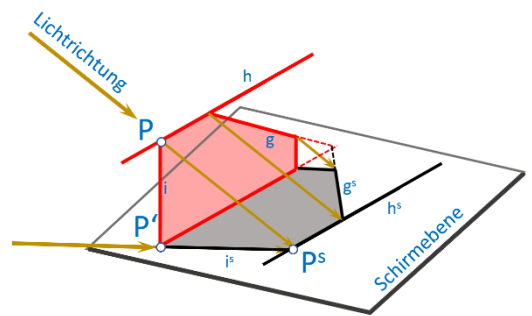
Schattenkonstruktionen (Parallelbeleuchtung)

Vorbemerkung: Die Konstruktion des *Schlagschattens* eines Körpers bei Parallelbeleuchtung (auf eine Schirmebene) folgt folgenden Regeln:

SR 1: Ist eine Kante h parallel zur Schirmebene, so ist ihr Schatten h^s parallel zu h .

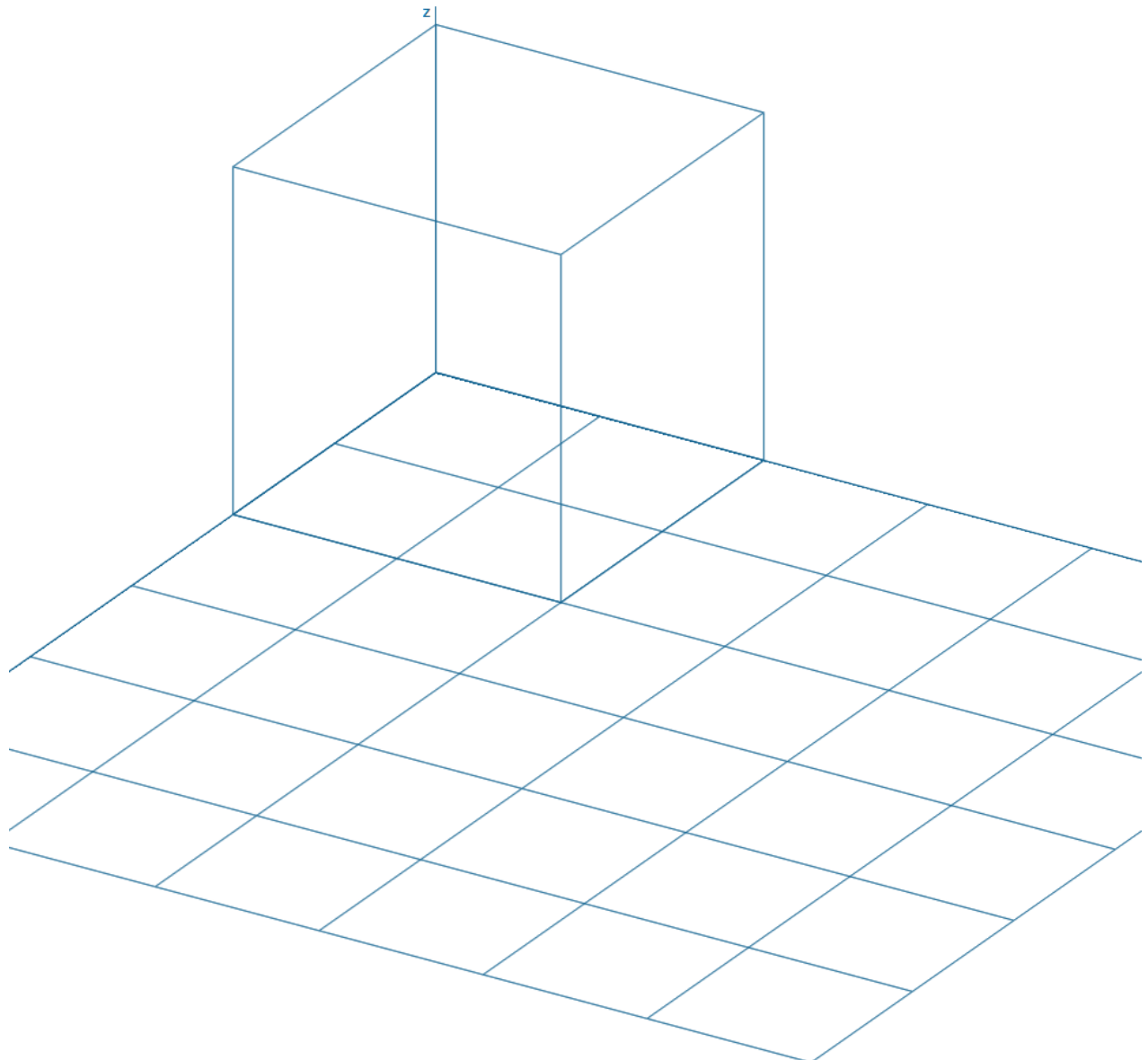
SR 2: Ist eine Kante g nicht parallel zur Schirmebene, so geht ihr (verlängerter) Schatten g^s durch den Spurpunkt von g .

SR 3: Ist eine Kante i normal zur Schirmebene, so ist ihr Schatten i^s parallel zur Normalprojektion der Lichtrichtung auf die Schattenebene.



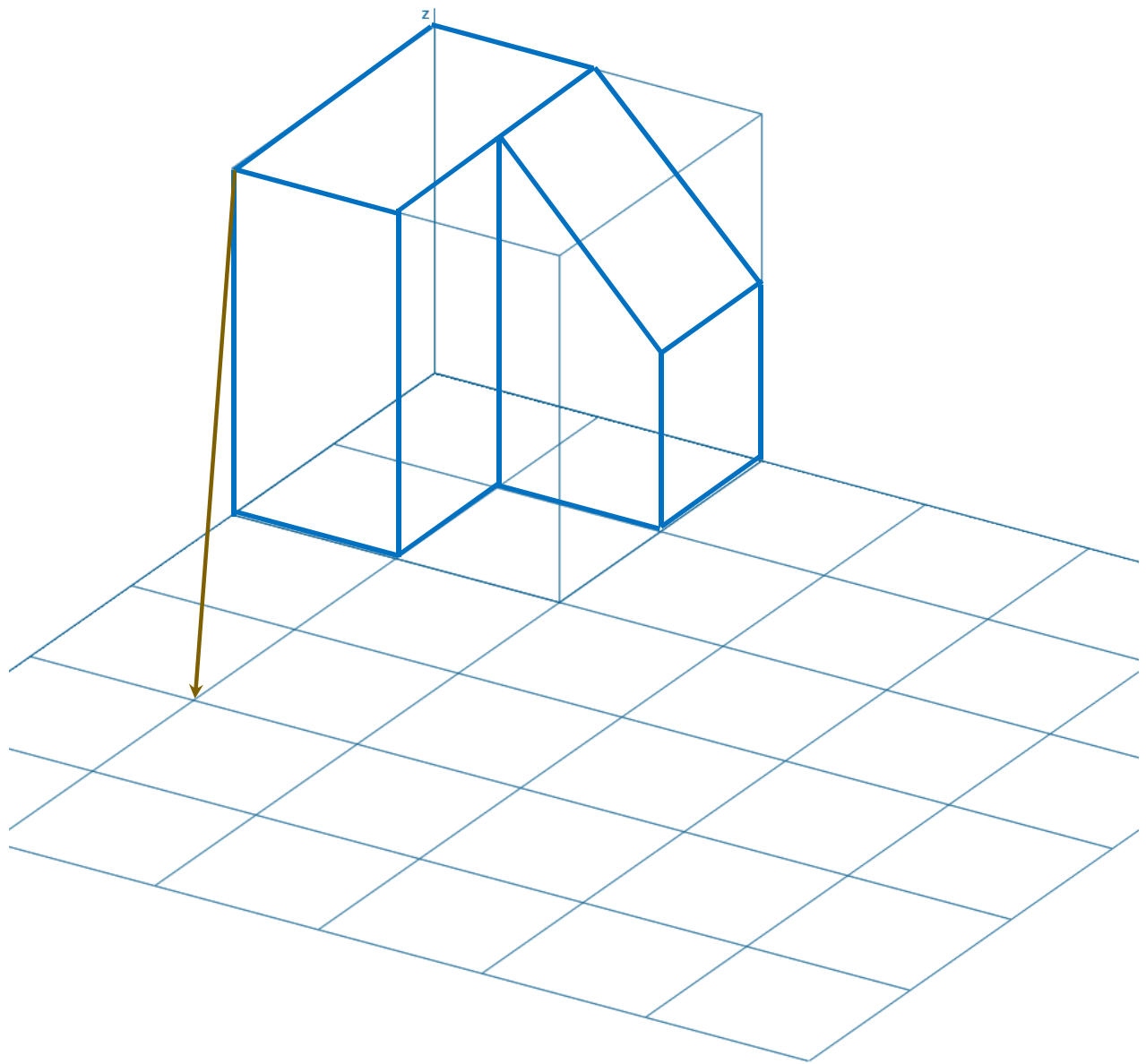
Aufgabe K5:

Die Lichtrichtung ist durch die Punkte $A(0/5/5)$ und $B(5/12,5/0)$ festgelegt. Konstruieren Sie den Schlagschatten des gegebenen Würfels.



Aufgabe 6:

Die Lichtrichtung ist durch die Punkte $A(5/0/5)$ und $B(2,5/10/0)$ festgelegt. Konstruieren Sie den Schlagschatten des gegebenen Objekts.



Aufgabe K1: Schnittpunkt

Tragen Sie die Punkte $A(2,5/2,5/5)$ und $B(2,5/7,5/2,5)$ ein und ermitteln Sie den Schnittpunkt der Strecke mit dem xz -parallelen Quadrat in der Ebene $y = 5$.

Aufgabe K2: Spurpunkte, Neigungswinkel

Zeichnen Sie die Gerade durch $A(5/5/3)$ und $B(0/5/5)$.

- Beschreiben Sie die Lage zu den drei Koordinatenebenen. Konstruieren und berechnen Sie den ersten und zweiten Spurpunkt (= Schnitt mit xy - bzw. yz -Ebene)
- Wie groß ist der erste Neigungswinkel? (= Winkel zwischen AB und der xy -Ebene)
- Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden durch $C(0/10/0)$, $D(2,5(2,5/2,5))$ mit den lotrechten Würfel Flächen.

Aufgabe K3: Gemeinlot

Konstruieren Sie das **Gemeinlot** der Geraden $g[A(5/5/3, B(0/5/5))]$ und $h[C(0/0/0), D(5/0/5)]$

Darunter versteht man die Strecke mit dem kürzesten Abstand zwischen beiden Geraden. Diese muss normal auf beide Geraden stehen.

Aufgabe 4: Reflexion

Ein Lichtstrahl geht vom Würfeckpunkt $G(0/0/5)$ aus, trifft die xy -Ebene in **a)** $S(5/7,5/0)$ **b)** $T(5/0/0)$ und wird daran reflektiert. Konstruieren Sie jeweils den reflektierten Strahl.

Aufgabe K5: Schlagschatten

Die Lichtrichtung ist durch die Punkte $A(0/5/5)$ und $B(5/12,5/0)$ festgelegt. Konstruieren Sie den Schlagschatten des gegebenen Würfels.

Aufgabe 6: Schlagschatten

Die Lichtrichtung ist durch die Punkte $A(5/0/5)$ und $B(2,5/10/0)$ festgelegt. Konstruieren Sie den Schlagschatten des gegebenen Objekts.

Aufgabe K7: Treffgerade

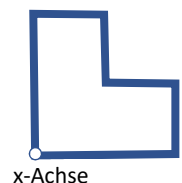
- Konstruieren Sie jenen Strahl, der von $A(5/0/5)$ ausgeht und beide Geraden $PQ[(P(0/2,5/5), Q(5/2,5/2,5))]$ und $RS[R(5/5/5), S(0/5/0)]$ schneidet.
- Berechnen Sie die Gleichung der Treffgeraden und ihre Schnittpunkte mit PQ und RS .

Aufgabe K8: Gemeinlot

- Konstruieren Sie den kürzesten Abstand zwischen den beiden Geraden $PQ[2,5/0/0), Q(0/5/0)]$ und $RS[R(0/0/5), S(5/5/5)]$.
- Berechnen Sie die Gleichung des Gemeinlots und dessen Schnittpunkte mit PQ und RS .

Aufgabe K9: Schatten

- Vom Würfel wird ein Viertel (vgl. Skizze) ausgeschnitten, sodass eine x -parallele Treppe entsteht. Konstruieren Sie von diesem Objekt den Schlag- und Eigenschatten für die Parallelbeleuchtung mit Lichtrichtung $AB[A(5/0/5), B(7,5/2,5/0)]$.
- Konstruieren Sie vom Objekt wie im Skriptum Aufgabe 5.7 (p 58) angegeben den Schlag- und Eigenschatten für die Parallelbeleuchtung mit der Lichtrichtung $AB[A(5/2,5/5), B(2,5/3/0)]$.



Lernumgebung Würfel

