Literatur zum Thema kann ich keine anführen, weil ich weder damals noch jetzt Zugang dazu hatte und auch nicht danach suchte.

Ich beginne mit einem Problem, das sich mir bei der Vorbereitung einer Schularbeit gestellt hatte: Wie legt man einen Würfel mit ganzzahligen Ecken in ein räumliches Koordinatensystem, und zwar „schräg". Dazu braucht man 3 gleich lange, paarweise normal stehende Vektoren, d.h. $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$ mit den Gleichungen $a^2+b^2+c^2=d^2+e^2+f^2=g^2+h^2+i^2$ und $ad+be+cf=0$, $ag+bh+ci=0$, $dg+eh+fi=0$, die in ganzen Zahlen zu lösen sind! Das habe ich gar nicht erst versucht.

Aus Verlegenheit habe ich also mit kleinen Zahlen zu raten begonnen: $\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$. Daß diese 3 Vektoren die gleiche Länge haben, sieht man sofort, und daß das Skalarprodukt von je zwei gleich 0 ist, erkennt man ebenfalls leicht. Weil mir die vielen Vektor-Klammern lästig waren, habe ich die Vielfachen dieser 3 Vektoren in Form einer Matrix geschrieben:

$$a\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a & 2a & 2a\\ 2a & -a & 2a\\ 2a & 2a & -a\end{pmatrix}$$

„Zeilen- und Spaltenvektoren sind gleich!"

1. Versuch einer Verallgemeinerung:

$$\begin{pmatrix}-a & b & b\\ b & -a & b\\ b & b & -a\end{pmatrix}$$

gleiche Länge? klar!

paarweise normal? $-2ab+b^2=0$

$\rightarrow b(b-2a)=0 \rightarrow b=0$ oder $b=2a$ Versuch gescheitert!

2. Versuch einer Verallgemeinerung:

$$\begin{pmatrix} -a & c & b \\ b & -a & c \\ c & b & -a \end{pmatrix}$$

„Zeilen- und Spaltenvektoren sind fast gleich!"

gleiche Länge? klar!

paarweise normal? $-ac-ab+bc=0$

$\rightarrow bc-ac=ab \rightarrow c(b-a)=ab$

Setzt man $b-a=1$, dann folgt $b=a+1$, $c=a(a+1)$

$$\begin{pmatrix} -a & a(a+1) & a+1 \\ a+1 & -a & a(a+1) \\ a(a+1) & a+1 & -a \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt $=0$? klar!

Länge ℓ?

$$\ell^2=(-a)^2+(a+1)^2+[a(a+1)]^2=a^2+(a+1)^2+a^2(a+1)^2=$$
$$=(a+1)^2(a^2+1)+a^2=(a^2+1)(a^2+1+2a)+a^2=(a^2+1)^2+2a(a^2+1)+a^2=$$
$$=[(a^2+1)+a]^2=(a^2+a+1)^2 \rightarrow \underline{\ell=a^2+a+1}$$

Für mich ganz überraschend stellte sich die Länge ℓ als eine natürliche Zahl heraus, wenn die Zahl a ganz ist.

Beispiele: $a=1$: $\ell=3$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $a=-1$: $\ell=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a=-2$: $\ell=3$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$a=2$: $\ell=7$ $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $a=-3$: $\ell=7$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $a=3$: $\ell=13$ $\begin{pmatrix} -3 & 12 & 4 \\ 4 & -3 & 12 \\ 12 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Man kann aus der Normalenbedingung $-ac-ab+bc=0$ aber noch mehr herausholen: $bc=a(b+c) \rightarrow a=\frac{bc}{b+c}$

$$(b+c)\cdot\begin{pmatrix} -\frac{bc}{b+c} & c & b \\ b & -\frac{bc}{b+c} & c \\ c & b & -\frac{bc}{b+c} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -bc & c(b+c) & b(b+c) \\ b(b+c) & -bc & c(b+c) \\ c(b+c) & b(b+c) & -bc \end{pmatrix}$$

$$\ell^2=(-bc)^2+[b(b+c)]^2+[c(b+c)]^2=b^2c^2+b^2(b+c)^2+c^2(b+c)^2=$$
$$=(b+c)^2(b^2+c^2)+b^2c^2=(b^2+c^2)(b^2+c^2+2bc)+b^2c^2=$$
$$=(b^2+c^2)^2+2bc(b^2+c^2)+(bc)^2=[(b^2+c^2)+bc]^2=(b^2+bc+c^2)^2$$

$\rightarrow \underline{l = b^2 + bc + c^2}$ d.h.: l ist eine natürliche Zahl, wenn b und c ganze Zahlen sind

Beispiel:

$$b=3,\ c=2: \begin{pmatrix} -6 & 10 & 15 \\ 15 & -6 & 10 \\ 10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \quad l = 3^2 + 3\cdot 2 + 2^2 = 19$$

Ich hatte bisher zwar bereits eine zweiparametrige Schar von gesuchten Vektoren gefunden, war aber trotzdem nicht ganz zufrieden. Auf den ersten Blick war nämlich zu erkennen, daß die Vektoren des Tripels gleich lang sind. Noch weniger zufrieden war ich – wegen der vielen Nullen – mit dem Tripel $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, bis ich auf die Idee kam, zwei der schon gefundenen Matrizen zu multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 & -5 \\ -10 & 5 & 10 \\ 11 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Wieder ganz unerwartet hatte ich nun 3 Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit ganzzahligen Koordinaten erhalten, denen man die gleiche Länge $l = 15$ nicht sofort ansah, und von denen man auch erst nach Berechnung von 3 Skalarprodukten feststellen konnte, daß sie paarweise aufeinander normal stehen. Auch die Zeilenvektoren (als Spaltenvektoren geschrieben) hatten dieselbe Eigenschaft: $\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$

Weitere Beispiele:

a) $$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad l = 9$$

b) $\begin{pmatrix} 6 & 10 & 15 \\ 15 & 6 & -10 \\ -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 44 & 32 \\ 52 & -23 & 4 \\ 16 & 28 & -47 \end{pmatrix}$ $\quad \ell = 57$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & -38 & 34 \\ 46 & 43 & -2 \\ -22 & 26 & 53 \end{pmatrix}$ $\quad \ell = 63$

Die Beispiele b) und c) sind bemerkenswert, weil alle 9 Matrixelemente verschiedenen Betrag haben, also wirklich wesentlich verschieden sind; daraus folgt, daß auch die Zeilenvektoren sich von den Spaltenvektoren wesentlich unterscheiden (nicht nur durch verschiedene Reihenfolge oder Vorzeichen der Koordinaten)

siehe z. B. b) $\begin{pmatrix} 17 \\ 52 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 44 \\ -23 \\ 28 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \\ -47 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 17 \\ 44 \\ 32 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 52 \\ -23 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 28 \\ -47 \end{pmatrix}$

Was ich noch vermißte waren Formeln, mit denen man direkt diese „allgemeinen" Vektoren berechnen konnte. Sonst hatte ich eigentlich alles, was ich brauchte, z. B.: Man kann einen beliebigen Raumpunkt $A(0|-12|-2)$ wählen und an ihn die 3 Vektoren $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{AE} = \begin{pmatrix} -11 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ anhängen, um die Punkte B, D, E eines Würfels ABCDEFGH in schräger Lage zu erhalten, wie in der folgenden Aufgabe zu sehen ist, für welche ich 3 Schwierigkeitsstufen vorgesehen habe. Übrigens sollte man auch im Mathematik-Unterricht von Grund- und Aufriß Gebrauch machen (nicht unbedingt in geordneter Lage, sondern als 2 getrennte Bilder ein und desselben Körpers).

$a=\frac{3}{2}, b=\frac{5}{2}, c=\frac{1}{2}, d=-\frac{5}{2}$ Drehachsenvektor $\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$ Streckfaktor: 15 $\quad y=\begin{pmatrix}2 & 10 & -11\\5 & 10 & 10\\14 & -5 & -2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\-12\\-2\end{pmatrix}$ Drehwinkel $\varphi=-99°35'39''$, $\tan\frac{\varphi}{2}=-\sqrt{\frac{7}{5}}$

Leichte Version des Beispiels:

Gegeben sind die Eckpunkte eines Parallelepipeds ABCDEFGH (= eines vierseitigen Prismas, begrenzt von lauter Parallelogrammen):

$A=\begin{pmatrix}0\\-12\\-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\-7\\12\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}12\\3\\7\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}10\\-2\\-7\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}-11\\-2\\-4\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}-9\\3\\10\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}1\\13\\5\end{pmatrix}, H=\begin{pmatrix}-1\\8\\-9\end{pmatrix}$

a) Zeichne Grund- und Aufriß des Parallelepipeds (in geordneter Lage)! Maßstab 1 : 2 (oder: Einheit 5 mm – „Kasterl"-Seitenlänge)

b) Aufgrund der Zeichnung ist eine Vermutung über die spezielle Form des Parallelepipeds auszusprechen und diese zu beweisen.

(oder: b) Ist ABCDEFGH ein Quader? c) Ist ABCDEFGH ein Würfel?)

Etwas anspruchsvollere Version des Beispiels:

Gegeben sind 3 Punkte $A=\begin{pmatrix}0\\-12\\-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\-7\\12\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}12\\3\\7\end{pmatrix}$.

a) Zeige, daß diese Punkte als 3 aufeinanderfolgende Eckpunkte eines Würfels ABCDEFGH verwendet werden können.

b) Ermittle daran anschließend die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte D, E, F, G, H des Würfels, wobei $x_E<0$ sein soll.

c) Zeichne Grund- und Aufriß des Würfels (in geordneter Lage)! Maßstab 1:2

Schwierigere Version des Beispiels:

Gegeben ist der Punkt $A=\begin{pmatrix}0\\-12\\-2\end{pmatrix}$ und die Gerade $g: X=\begin{pmatrix}6\\-3\\10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

a) Schneide die Normalebene ε auf die Gerade g durch den Punkt A mit der Geraden g. Die Koordinaten des Schnittpunktes B sind zu ermitteln.

(oder statt a) Ermittle auf der Geraden g jenen Punkt B, welcher vom Punkt A minimale Entfernung hat [in Form einer Extremwertaufgabe!] und zeige, daß in diesem Fall die Strecke $\overline{AB}$ normal zu g ist.)

b) Die Punkte A und B seien 2 Eckpunkte eines Quadrates ABCD, dessen Eckpunkt C sich auf der Geraden g befindet ($y_C>0$!). Ermittle die Koordinaten der fehlenden Punkte C und D des Quadrates.

c) Über dem Quadrat ABCD ist ein Würfel ABCDEFGH zu errichten ($x_E<0$!). Ermittle die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte E, F, G, H.

d) Zeichne Grund- und Aufriß des Würfels (in geordneter Lage)! Maßstab 1:2

„Neue" Koordinaten der Würfeleckpunkte durch Addition des Vektors $\begin{pmatrix}13\\0\\11\end{pmatrix}$:

$A=\begin{pmatrix}13\\-12\\9\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}15\\-7\\23\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}25\\3\\18\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}23\\-2\\4\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}2\\-2\\7\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}4\\3\\21\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}14\\13\\16\end{pmatrix}, H=\begin{pmatrix}12\\8\\2\end{pmatrix}$

„Neue" Gleichung von $g: X=\begin{pmatrix}19\\-3\\21\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

für den DG-Unterricht

Leichte Version des Beispiels (Lösung):

a) Grundriß: z-Koordinate weglassen; x nach rechts, y nach oben

Sichtbarkeit: B hat größte z-Koordinate, ist also von oben zu sehen

b) Aufriß: x-Koordinate weglassen; y nach rechts, z nach oben

Sichtbarkeit: C hat größte x-Koordinate, ist also von vorne zu sehen

Kreuzriß: y-Koordinate weglassen; z nach rechts, x nach oben

Sichtbarkeit: G hat größte y-Koordinate, ist also von rechts zu sehen

b) Vermutung: ABCDEFGH ist ein Würfel

Zuerst Quader: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\5\\14\end{pmatrix}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}10\\10\\-5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EH}$,

$\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}-11\\10\\-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DH}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\cdot10+5\cdot10+14\cdot(-5)=20+50-70=0$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=2\cdot(-11)+5\cdot10+14\cdot(-2)=-22+50-28=0$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=10\cdot(-11)+10\cdot10+(-5)\cdot(-2)=$

$=-110+100+10=0$, d.h.: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ sind paarweise zueinander normal, also ABCDEFGH ist ein Quader.

Würfel: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+5^2+14^2}=\sqrt{4+25+196}=\sqrt{225}=15=|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{EF}|=|\overrightarrow{HG}|$

$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{10^2+10^2+(-5)^2}=\sqrt{100+100+25}=\sqrt{225}=15=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{FG}|=|\overrightarrow{EH}|$

$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{(-11)^2+10^2+(-2)^2}=\sqrt{121+100+4}=\sqrt{225}=15=|\overrightarrow{BF}|=|\overrightarrow{CG}|=|\overrightarrow{DH}|$

Aufwändigere Version des Beispiels (Lösung):

a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\5\\14\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}10\\10\\-5\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=15$ wie oben

b) $D=A+\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\\-12\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\10\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\\-7\end{pmatrix}$ wegen $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\5\\14\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-33\\30\\-6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-11\\10\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow|\vec{n}|=3\left|\begin{pmatrix}-11\\10\\-2\end{pmatrix}\right|=3\cdot15=45$

$\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\vec{n}$ oder $=-\frac{1}{3}\vec{n}$; wegen $x_E<0$ muß sein: $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\vec{n}$

$\Rightarrow E=A+\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}0\\-12\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-11\\10\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\-2\\-4\end{pmatrix}$; analog: $F=\begin{pmatrix}-9\\3\\10\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}1\\13\\5\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}-1\\8\\-9\end{pmatrix}$

Schwierigere Version des Beispiels (Lösung):

a) $\varepsilon\perp g$ durch A: $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-12\\-2\end{pmatrix}=0-24+2=-22$

$g\cap\varepsilon$: $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}6\\-3\\10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right]=-22\Rightarrow-4+9t=-22\Rightarrow t=-2\Rightarrow B=\begin{pmatrix}2\\-7\\12\end{pmatrix}$

b) $\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=3$, $|\overrightarrow{AB}|=\left|\begin{pmatrix}2\\5\\14\end{pmatrix}\right|=15\Rightarrow\overrightarrow{BC}=5\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ oder $=-5\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

b) wegen $y_C>0$ muß sein: $\overrightarrow{BC}=5\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow C=\begin{pmatrix}12\\3\\7\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}10\\-2\\-7\end{pmatrix}$

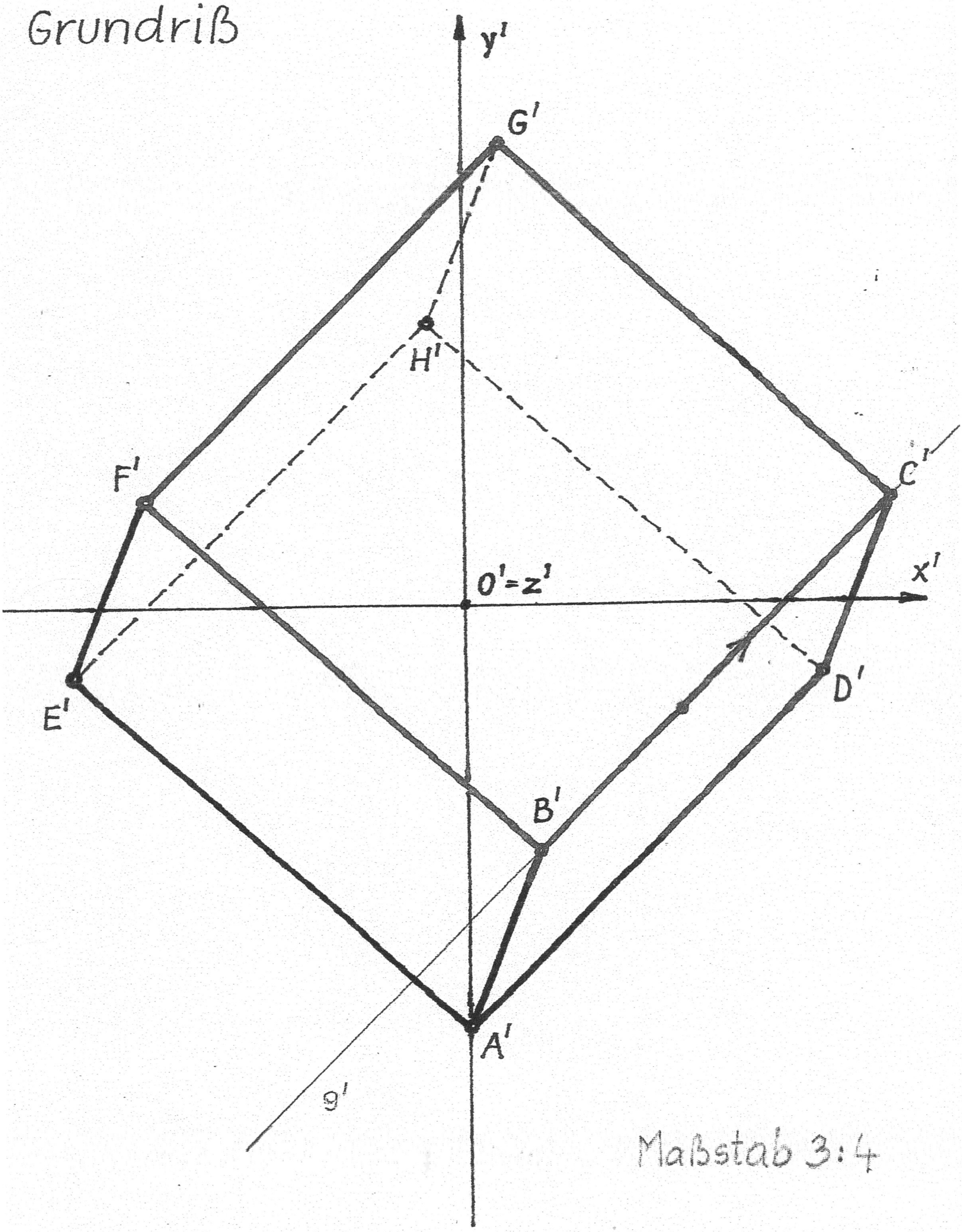
c) wie b) in aufwändigerer Version

Extremwertaufgabe: $B\in g$: $\begin{pmatrix}6+2t\\-3+2t\\10-t\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}6+2t\\9+2t\\12-t\end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(6+2t)^2+(9+2t)^2+(12-t)^2}\ \ldots$ min $\Rightarrow f(t)=(6+2t)^2+(9+2t)^2+(12-t)^2\ \ldots$ min

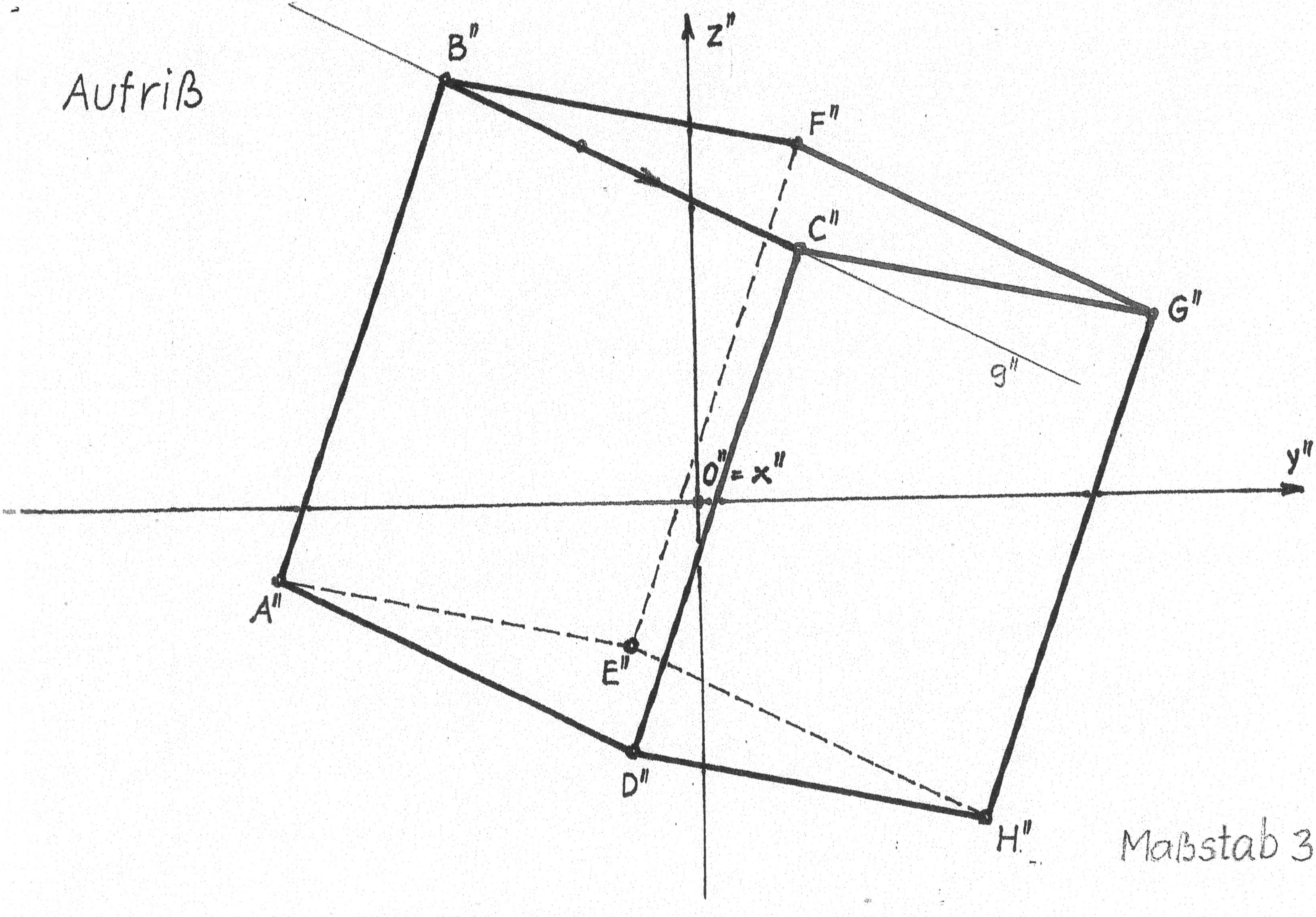
$f'(t)=2(6+2t)\cdot2+2(9+2t)\cdot2+2(12-t)\cdot(-1)=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow B=\begin{pmatrix}2\\-7\\12\end{pmatrix}$

Grundriß



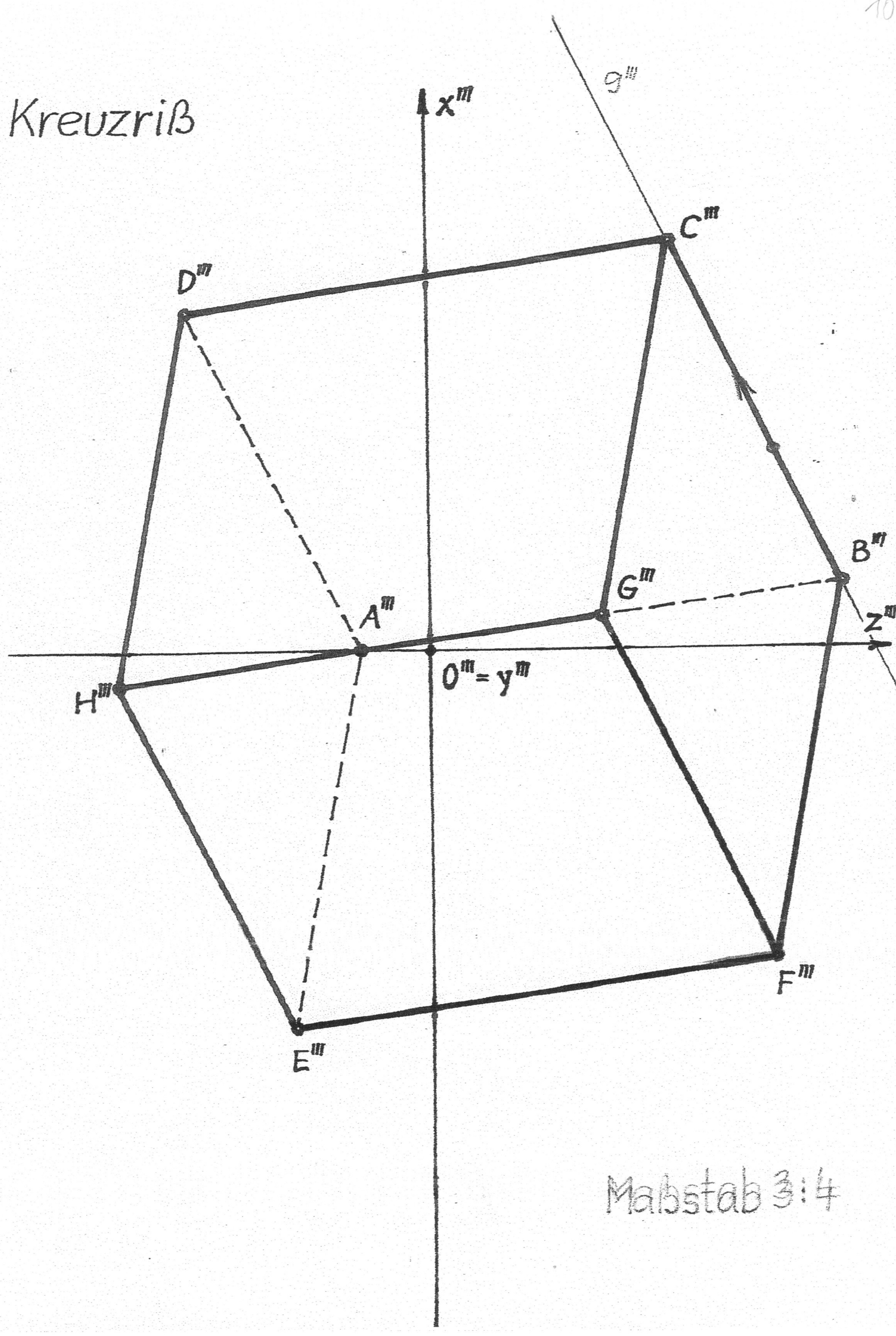
Maßstab 3:4

Aufriß

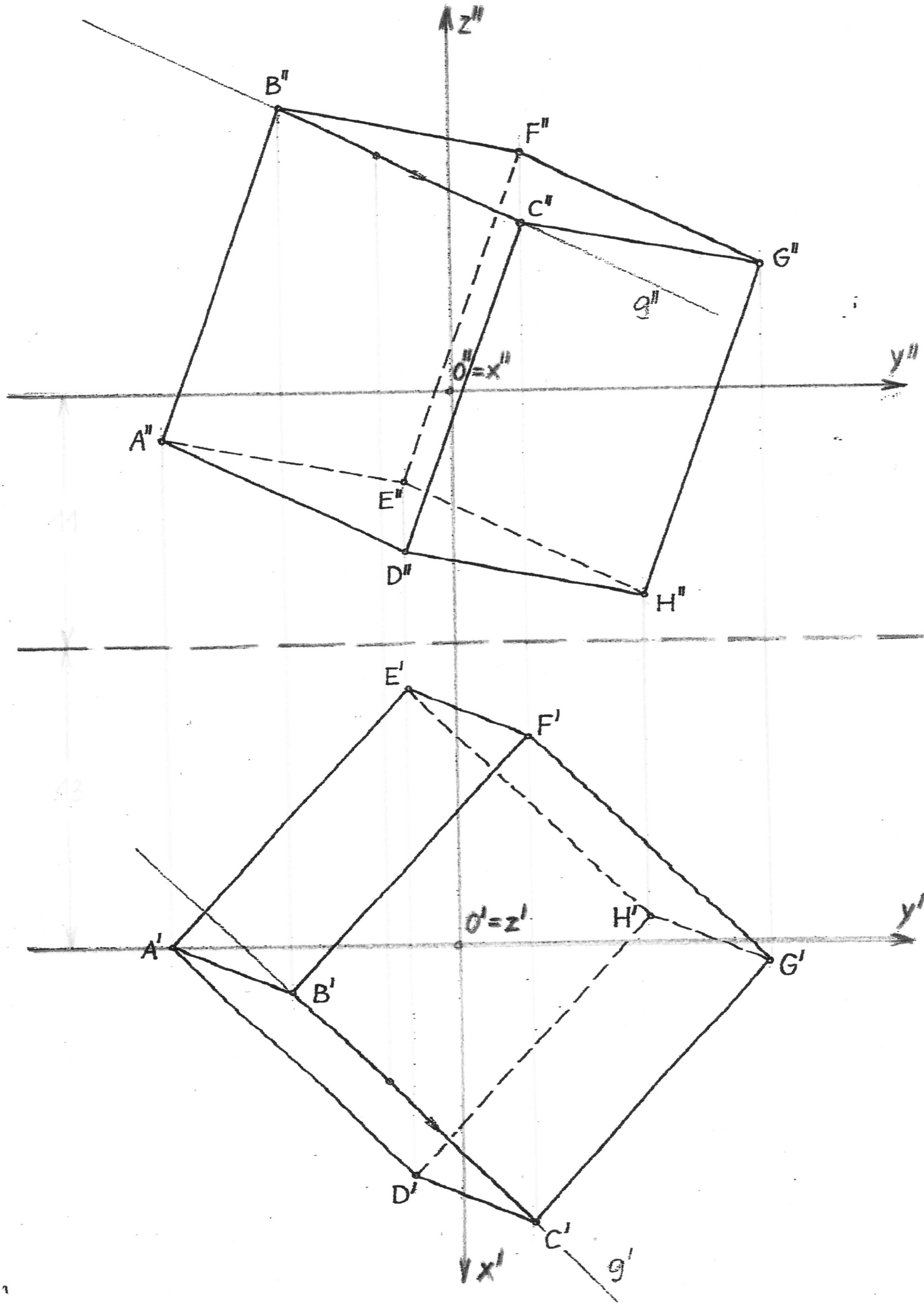


Maßstab 3 : 4

Kreuzriß



Maßstab 3:4



z''
B''
F''
C''
G''
g''
y''
0''=x''
A''
E''
D''
H''
E'
F'
H'
0'=z'
y'
A'
B'
G'
D'
C'
x'
g'

Schüler sollen im Geometrie-Unterricht „sehen" lernen und nicht „blind" rechnen.

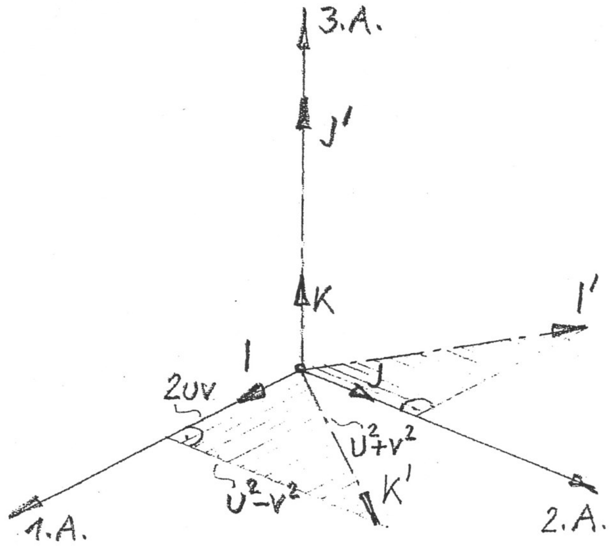
Bisher ist es mir nur um 3 gleich lange, paarweise aufeinander normalstehende Vektoren gegangen. Doch durch meine „abkürzende" Matrixschreibweise legte ich zunehmend stärker mein Augenmerk auf orthogonale Matrizen und die durch sie vermittelten Drehungen, bzw. Drehstreckungen. Dabei leisteten Pythagoräische Zahlentripel wertvolle Dienste (siehe S. 13-18) und natürlich die geometrische Veranschaulichung von räumlichen Drehungen, bzw. Drehstreckungen.
Die glücklich erratene Matrix

$$\begin{pmatrix} 2(a^2+d^2)-l & 2(ab-cd) & 2(ac+bd) \\ 2(ab+cd) & 2(b^2+d^2)-l & 2(bc-ad) \\ 2(ac-bd) & 2(bc+ad) & 2(c^2+d^2)-l \end{pmatrix}$$

mit $l = a^2+b^2+c^2+d^2$ als Länge der Spalten- bzw. Zeilen=vektoren zeigt, daß im 3-dimensionalen Raum die Länge l stets eine natürliche Zahl ist, falls die Vektorkoordinaten von 3 gleich langen, paarweise aufeinander normalstehenden Vektoren ganze Zahlen sind. Das ist in der Ebene bei 2 und im 4-dimensionalen Raum bei 4 Vektoren nicht der Fall.

Nach einem Satz von LAGRANGE läßt sich jede natürliche Zahl stets als Summe von 4 Quadraten (einschließlich 0!) schreiben. Man kann deshalb folgendermaßen vorgehen: Man wählt eine natürliche

→ S. 19



$$(1)\begin{cases} I' = -(u^2-v^2)\,I + 2uv\,J \\ J' = (u^2+v^2)\,K \\ K' = 2uv\,I + (u^2-v^2)\,J \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} I'' = -(p^2-q^2)\,I' + 2pq\,J' \\ J'' = (p^2+q^2)\,K' \\ K'' = 2pq\,I' + (p^2-q^2)\,J' \end{cases}$$

$$(1)\circ(2)\begin{cases} I'' = -(p^2-q^2)\,[-(u^2-v^2)\,I + 2uv\,J] + 2pq\,(u^2+v^2)\,K \\ J'' = (p^2+q^2)\,[2uv\,I + (u^2-v^2)\,J] \\ K'' = 2pq\,[-(u^2-v^2)\,I + 2uv\,J] + (p^2-q^2)(u^2+v^2)\,K \end{cases}$$

$$I'' = (p^2-q^2)(u^2-v^2)\,I - 2(p^2-q^2)uv\,J + 2pq(u^2+v^2)\,K$$
$$J'' = 2(p^2+q^2)uv\,I + (p^2+q^2)(u^2-v^2)\,J$$
$$K' = -2pq(u^2-v^2)\,I + 4pquv\,J + (p^2-q^2)(u^2+v^2)\,K$$

$$I'' = (p^2u^2-q^2u^2-p^2v^2+q^2v^2)\,I + 2(-p^2uv+q^2uv)\,J + 2(pqu^2+pqv^2)\,K$$
$$J'' = 2(p^2uv+q^2uv)\,I + (p^2u^2+q^2u^2-p^2v^2-q^2v^2)\,J$$
$$K'' = 2(-pqu^2+pqv^2)\,I + 4pquv\,J + (p^2u^2-q^2u^2+p^2v^2-q^2v^2)\,K$$

Setze: $qv := a$, $qu := b$, $pv := c$, $pu := d$

$$I'' = (d^2-b^2-c^2+a^2)\,I + 2(-cd+ab)\,J + 2(bd+ac)\,K$$
$$J'' = 2(cd+ab)\,I + (d^2+b^2-c^2-a^2)\,J$$
$$K'' = 2(-bd+ac)\,I + 4bc\ (\text{oder } 4ad)\,J + (d^2-b^2+c^2-a^2)\,K$$

$$I'' = (a^2-b^2-c^2+d^2)\,I + 2(ab-cd)\,J + 2(ac+bd)\,K$$
$$J'' = 2(ab+cd)\,I + (-a^2+b^2-c^2+d^2)\,J + 2(bc-ad)\,K$$
$$K'' = 2(ac-bd)\,I + 2(bc+ad)\,J + (-a^2-b^2+c^2+d^2)\,K$$

mit $ad = bc$

$$(1)\quad \begin{cases} I' = -(u^2-v^2)\, I + 2uv\, J \\ J' = (u^2+v^2)\, K \\ K' = 2uv\, I + (u^2-v^2)\, J \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} I'' = -(s^2-t^2)\, I' + 2st\, J' \\ J'' = (s^2+t^2)\, K' \\ K'' = 2st\, I' + (s^2-t^2)\, J' \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} I''' = -(p^2-q^2)\, I'' + 2pq\, J'' \\ J''' = (p^2+q^2)\, K'' \\ K''' = 2pq\, I'' + (p^2-q^2)\, J'' \end{cases}$$

$$(1)\circ(2)\circ(3)\quad \begin{cases} I''' = [-(p^2-q^2)(s^2-t^2)(u^2-v^2) + 2pq\,(s^2+t^2)\,2uv]\, I \\ \qquad + [(p^2-q^2)(s^2-t^2)2uv + 2pq\,(s^2+t^2)(u^2-v^2)]\, J \\ \qquad - (p^2-q^2)\,2st\,(u^2+v^2)\, K \\ J''' = -(p^2+q^2)\,2st\,(u^2-v^2)\, I + (p^2+q^2)\,2st \cdot 2uv\, J \\ \qquad + (p^2+q^2)(s^2-t^2)(u^2+v^2)\, K \\ K''' = [2pq\,(s^2-t^2)(u^2-v^2) + (p^2-q^2)(s^2+t^2)\,2uv]\, I \\ \qquad + [-2pq\,(s^2-t^2) \cdot 2uv + (p^2-q^2)(s^2+t^2)(u^2-v^2)]\, J \\ \qquad + 2pq \cdot 2st\,(u^2+v^2)\, K \end{cases}$$

Setzt man $t(pv-qu):=a$, $t(pu+qv):=b$, $s(pv+qu):=c$ und $s(pu-qv):=d$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} I''' &= -[2(a^2+d^2)-\ell]\, I - 2(ab-cd)\, J - 2(ac+bd)\, K \\ J''' &= 2(ac-bd)\, I + 2(bc+ad)\, J + [2(c^2+d^2)-\ell]\, K \\ K''' &= 2(ab+cd)\, I + [2(b^2+d^2)-\ell]\, J + 2(bc-ad)\, K \end{aligned}$$

mit $\ell = a^2+b^2+c^2+d^2$

und für $I^{IV} = -I'''$, $J^{IV} = K'''$, $K^{IV} = J'''$ erhält man:

$$\begin{cases} I^{IV} = [2(a^2+d^2)-\ell]\, I + 2(ab-cd)\, J + 2(ac+bd)\, K \\ J^{IV} = 2(ab+cd)\, I + [2(b^2+d^2)-\ell]\, J + 2(bc-ad)\, K \\ K^{IV} = 2(ac-bd)\, I + 2(bc+ad)\, J + [2(c^2+d^2)-\ell]\, K \end{cases}$$

3 gleich lange, paarweise aufeinander normalstehende Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 2(a^2+d^2)-\ell \\ 2(ab-cd) \\ 2(ac+bd) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2(ab+cd) \\ 2(b^2+d^2)-\ell \\ 2(bc-ad) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2(ac-bd) \\ 2(bc+ad) \\ 2(c^2+d^2)-\ell \end{pmatrix}$$

mit $\ell = a^2+b^2+c^2+d^2$

oder Drehmatrix:

$$\frac{1}{\ell} \cdot \begin{pmatrix} 2(a^2+d^2)-\ell & 2(ab-cd) & 2(ac+bd) \\ 2(ab+cd) & 2(b^2+d^2)-\ell & 2(bc-ad) \\ 2(ac-bd) & 2(bc+ad) & 2(c^2+d^2)-\ell \end{pmatrix}$$

mit $\ell = a^2+b^2+c^2+d^2$

Berechnung der Länge eines Vektors:

$$(\;)^2 = [2(a^2+d^2)-\ell]^2 + [2(ab-cd)]^2 + [2(ac+bd)]^2 =$$

$$= 4(a^2+d^2)^2 - 4(a^2+d^2)\ell + \ell^2 + 4(ab-cd)^2 + 4(ac+bd)^2 =$$

$$= \ell^2 + 4\left[(a^2+d^2)^2 - (a^2+d^2)(a^2+b^2+c^2+d^2) + (ab-cd)^2 + (ac+bd)^2\right] =$$

$$= \ell^2 + 4\left[(a^2+d^2)^2 - (a^2+d^2)^2 - (a^2+d^2)(b^2+c^2) + (ab-cd)^2 + (ac+bd)^2\right] =$$

$$= \ell^2 + 4\left[-a^2b^2 - b^2d^2 - a^2c^2 - c^2d^2 + a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2 + a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2\right] =$$

$$= \ell^2 + 4 \cdot 0 = \ell^2 \Rightarrow \sqrt{(\;)^2} = \sqrt{\ell^2} = \underline{\ell = a^2+b^2+c^2+d^2}$$

Skalarprodukt zweier Vektoren:

$$(\;)\cdot(\;) = [2(a^2+d^2)-\ell]\cdot 2(ab+cd) + 2(ab-cd)[2(b^2+d^2)-\ell] +$$

$$+ 2(ac+bd)\cdot 2(bc-ad) = 4(a^2+d^2)(ab+cd) - 2\ell(ab+cd)$$

$$+ 4(ab-cd)(b^2+d^2) - 2(ab-cd)\ell + 4(ac+bd)(bc-ad) =$$

$$= -2\ell\cdot 2ab + 4\left[(a^2+d^2)(ab+cd) + (ab-cd)(b^2+d^2) + (ac+bd)(bc-ad)\right] =$$

$$= 4\left[-ab(a^2+b^2+c^2+d^2) + ab(a^2+b^2+2d^2) + cd(a^2-b^2) + (ac+bd)(bc-ad)\right] =$$

$$= 4\left[-ab(a^2+b^2+d^2) - abc^2 + ab(a^2+b^2+d^2) + abd^2 + a^2cd - b^2cd + abc^2 + b^2cd - a^2cd - abd^2\right] =$$

$$= 4 \cdot 0 = 0$$

Die 2 Vektoren stehen aufeinander normal.

Tripel normaler Vektoren gleicher Länge

$\ell=1$: $1^2+0^2+0^2+0^2$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

$\ell=3$: $1^2+1^2+1^2+0^2$

$$\begin{matrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{matrix}$$

$\ell=5$: $2^2+1^2+0^2+0^2$

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{matrix}$$

$\ell=7$: $2^2+1^2+1^2+1^2$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{matrix}$$

$\ell=9$: $2^2+2^2+1^2+0^2$

$$\begin{matrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{matrix}$$

$3^2+0^2+0^2+0^2$

$$\begin{matrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{matrix}$$

$\ell=11$: $3^2+1^2+1^2+0^2$

$$\begin{matrix} 7 & 6 & 6 \\ 6 & -9 & 2 \\ 6 & 2 & -9 \end{matrix}$$

$\ell=13$: $3^2+2^2+0^2+0^2$

$$\begin{matrix} 5 & 12 & 0 \\ 12 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{matrix}$$

$2^2+2^2+2^2+1^2$

$$\begin{matrix} -3 & 4 & 12 \\ 12 & -3 & 4 \\ 4 & 12 & -3 \end{matrix}$$

$\ell=15$: $3^2+2^2+1^2+1^2$

$$\begin{matrix} 5 & 10 & 10 \\ 14 & -5 & -2 \\ 2 & 10 & -11 \end{matrix}$$

$\ell=17$: $4^2+1^2+0^2+0^2$

$$\begin{matrix} 15 & 8 & 0 \\ 8 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{matrix}$$

$3^2+2^2+2^2+0^2$

$$\begin{matrix} 1 & 12 & 12 \\ 12 & -9 & 8 \\ 12 & 8 & -9 \end{matrix}$$

$\ell=19$: $4^2+1^2+1^2+1^2$

$$\begin{matrix} 15 & 6 & 10 \\ 10 & -15 & -6 \\ 6 & 10 & -15 \end{matrix}$$

$3^2+3^2+1^2+0^2$

$$\begin{matrix} -1 & 18 & 6 \\ 18 & -1 & 6 \\ 6 & 6 & -17 \end{matrix}$$

$\ell=21$: $4^2+2^2+1^2+0^2$

$$\begin{matrix} 11 & 16 & 8 \\ 16 & -13 & 4 \\ 8 & 4 & -19 \end{matrix}$$

$3^2+2^2+2^2+2^2$

$$\begin{matrix} 5 & 4 & 20 \\ 20 & -5 & -4 \\ 4 & 20 & -5 \end{matrix}$$

$\ell=23$: $3^2+3^2+2^2+1^2$

$$\begin{matrix} -3 & 14 & 18 \\ 22 & -3 & 6 \\ 6 & 18 & -13 \end{matrix}$$

$\ell=25$: $5^2+0^2+0^2+0^2$

$$\begin{matrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{matrix}$$

$4^2+3^2+0^2+0^2$

$$\begin{matrix} 7 & 24 & 0 \\ 24 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{matrix}$$

$4^2+2^2+2^2+1^2$

$$\begin{matrix} 9 & 12 & 20 \\ 20 & -15 & 0 \\ 12 & 16 & -15 \end{matrix}$$

$\ell=27$: $3^2+3^2+3^2+0^2$

$$\begin{matrix} -9 & 18 & 18 \\ 18 & -9 & 18 \\ 18 & 18 & -9 \end{matrix}$$

$5^2+1^2+1^2+0^2$

$$\begin{matrix} 23 & 10 & 10 \\ 10 & -25 & 2 \\ 10 & 2 & -25 \end{matrix}$$

$4^2+3^2+1^2+1^2$

$$\begin{matrix} 7 & 22 & 14 \\ 26 & -7 & -2 \\ 2 & 14 & -23 \end{matrix}$$

$\ell=29$: $5^2+2^2+0^2+0^2$

$$\begin{matrix} 21 & 20 & 0 \\ 20 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & -29 \end{matrix}$$

$4^2+3^2+2^2+0^2$

$$\begin{matrix} 3 & 24 & 16 \\ 24 & -11 & 12 \\ 16 & 12 & -21 \end{matrix}$$

$\ell=31$: $5^2+2^2+1^2+1^2$

$$\begin{matrix} 21 & 18 & 14 \\ 22 & -21 & -6 \\ 6 & 14 & -27 \end{matrix}$$

$3^2+3^2+3^2+2^2$

$$\begin{matrix} -5 & 6 & 30 \\ 30 & -5 & 6 \\ 6 & 30 & -5 \end{matrix}$$

$\ell=33$: $5^2+2^2+2^2+0^2$

$$\begin{matrix} 17 & 20 & 20 \\ 20 & -25 & 8 \\ 20 & 8 & -25 \end{matrix}$$

$4^2+4^2+1^2+0^2$

$$\begin{matrix} -1 & 32 & 8 \\ 32 & -1 & 8 \\ 8 & 8 & -31 \end{matrix}$$

$4^2+3^2+2^2+2^2$

$$\begin{matrix} 7 & 16 & 28 \\ 32 & -7 & -4 \\ 4 & 28 & -17 \end{matrix}$$

$\ell=35$: $5^2+3^2+1^2+0^2$

$$\begin{matrix} 15 & 30 & 10 \\ 30 & -17 & 6 \\ 10 & 6 & -33 \end{matrix}$$

$4^2+3^2+3^2+1^2$

$$\begin{matrix} -1 & 18 & 30 \\ 30 & -15 & 10 \\ 18 & 26 & -15 \end{matrix}$$

Tripel von gleich langen, paarweise normal stehenden Vektoren

$$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}3&4&0\\-4&3&0\\0&0&5\end{matrix}\qquad\begin{matrix}2&3&6\\3&-6&2\\6&2&-3\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}-1&8&4\\8&-1&4\\4&4&-7\end{matrix}\qquad\begin{matrix}7&6&6\\6&-9&2\\6&2&-9\end{matrix}\qquad\begin{matrix}5&12&0\\-12&5&0\\0&0&13\end{matrix}\qquad\begin{matrix}-3&4&12\\12&-3&4\\4&12&-3\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}2&11&10\\5&-10&10\\14&2&-5\end{matrix}\qquad\begin{matrix}8&15&0\\-15&8&0\\0&0&17\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&12&12\\12&-9&8\\12&8&-9\end{matrix}\qquad\begin{matrix}6&15&10\\15&-10&6\\10&6&-15\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}-1&18&6\\18&-1&6\\6&6&-17\end{matrix}\qquad\begin{matrix}11&16&8\\16&-13&4\\8&4&-19\end{matrix}\qquad\begin{matrix}4&5&20\\5&-20&4\\20&4&-5\end{matrix}\qquad\begin{matrix}-3&14&18\\22&-3&6\\6&18&-13\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}7&24&0\\-24&7&0\\0&0&25\end{matrix}\qquad\begin{matrix}9&12&20\\20&-15&0\\12&16&-15\end{matrix}\qquad\begin{matrix}23&10&10\\10&-25&2\\10&2&-25\end{matrix}\qquad\begin{matrix}2&23&14\\7&-14&22\\26&2&-7\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}20&21&0\\-21&20&0\\0&0&29\end{matrix}\qquad\begin{matrix}3&24&16\\24&-11&12\\16&12&-21\end{matrix}\qquad\begin{matrix}6&27&14\\21&-14&18\\22&6&-21\end{matrix}\qquad\begin{matrix}-5&6&30\\30&-5&6\\6&30&-5\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}4&17&28\\7&-28&16\\32&4&-7\end{matrix}\qquad\begin{matrix}17&20&20\\20&-25&8\\20&8&-25\end{matrix}\qquad\begin{matrix}-1&32&8\\32&-1&8\\8&8&-31\end{matrix}\qquad\begin{matrix}15&30&10\\30&-17&6\\10&6&-33\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}-1&18&30\\30&-15&10\\18&26&-15\end{matrix}\qquad\begin{matrix}12&35&0\\-35&12&0\\0&0&37\end{matrix}\qquad\begin{matrix}12&21&28\\21&-28&12\\28&12&-21\end{matrix}\qquad\begin{matrix}-3&28&24\\36&-3&8\\8&24&-27\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}-10&14&35\\35&-10&14\\14&35&-10\end{matrix}\qquad\begin{matrix}13&26&26\\34&-19&2\\14&22&-29\end{matrix}\qquad\begin{matrix}31&24&12\\24&-33&4\\12&4&-39\end{matrix}\qquad\begin{matrix}9&40&0\\-40&9&0\\0&0&41\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}-9&32&24\\32&-9&24\\24&24&-23\end{matrix}\qquad\begin{matrix}7&30&30\\30&-25&18\\30&18&-25\end{matrix}\qquad\begin{matrix}2&9&42\\39&-18&2\\18&38&-9\end{matrix}\qquad\begin{matrix}-6&7&42\\42&-6&7\\7&42&-6\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}20&29&28\\35&-28&4\\20&20&-35\end{matrix}\qquad\begin{matrix}5&40&20\\40&-13&16\\20&16&-37\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&34&38\\46&-17&14\\22&34&-31\end{matrix}\qquad\begin{matrix}17&44&32\\52&-23&4\\16&28&-47\end{matrix}$$

Zahl l, zerlegt sie in eine Summe von 4 Quadraten (das ist bei größeren Zahlen auf mehrfache Art und Weise möglich) und setzt in obige Formeln ein. Die Zahlen für a, b, c, d kann man noch permutieren und mit Vorzeichen versehen. Im günstigsten Fall (wie bei $l = 57$ bzw. $l = 63$) erhält man 192 verschiedene Matrizen, die ein gegebenes Rechtssystem wieder in ein Rechtssystem überführen. Daneben gibt es noch 192 Matrizen, die durch eine zusätzliche Spiegelung ein Rechts- in ein Linkssystem, und umgekehrt, überführen. Die Matrizen der 1. Art bezeichne ich als D-Matrizen (Drehung + Streckung), die der 2. Art als S-Matrizen (Drehung + Streckung + Spiegelung). Geometrisch ist klar, daß aus einer D-Matrix durch Vertauschung von 2 Spalten- bzw. 2 Zeilenvektoren oder durch Multiplikation eines Vektors mit (−1) eine S-Matrix entsteht und umgekehrt. Bei ungeradem l sind die 3 Elemente in der Hauptdiagonalen stets ungerade Zahlen, die restlichen 6 Zahlen aber gerade. Da man die 3 Spalten- bzw Zeilenvektoren einer D-Matrix aber zyklisch vertauschen darf, um wieder eine D-Matrix zu erhalten, müßte ich noch etwas übersehen haben. Und es war eigentlich ganz einfach: Man kann für a, b, c, d auch nichtganze Zahlen einsetzen und trotzdem Matrizen mit ganzen Zahlen erhalten:

$$l = 57 = 6^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

wegen $2 \cdot 57 = 114 = 10^2+2^2+3^2+1^2 = 8^2+4^2+5^2+3^2 = 7^2+5^2+6^2+2^2$

und $4 \cdot 57 = 228 = 13^2+7^2+3^2+1^2 = 11^2+9^2+5^2+1^2$

Es gibt also insgesamt $6 \cdot 192 = 1152$ D-Matrizen mit denselben Absolutbeträgen der 9 Matrizenelementen. Für einen nicht symmetrischen Körper gibt es ebenso viele schräge Raumlagen und dazu 1152 Spiegelbilder. Da es für die Zahl $\ell = 57$ vier verschiedene Zerlegungen in 4 Quadrate gibt (mit ganz anderen Matrizen), ist die Zahl der Raumlagen noch wesentlich größer.

Für $\ell = a^2+b^2+c^2+d^2$ erhält man auf folgende Weise die Zahlen, die man in die allgemeinen Formeln einsetzen kann:

0. Stufe:	a	b	c	d
1. Stufe:	$\frac{a+b}{\sqrt{2}}$	$\frac{a-b}{\sqrt{2}}$	$\frac{c+d}{\sqrt{2}}$	$\frac{c-d}{\sqrt{2}}$
	$\frac{a+c}{\sqrt{2}}$	$\frac{a-c}{\sqrt{2}}$	$\frac{b+d}{\sqrt{2}}$	$\frac{b-d}{\sqrt{2}}$
	$\frac{a+d}{\sqrt{2}}$	$\frac{a-d}{\sqrt{2}}$	$\frac{b+c}{\sqrt{2}}$	$\frac{b-c}{\sqrt{2}}$
2. Stufe:	$\frac{a+b+c+d}{2}$	$\frac{a+b-c-d}{2}$	$\frac{a-b+c-d}{2}$	$\frac{a-b-c+d}{2}$
	$\frac{a+b+c-d}{2}$	$\frac{a+b-c+d}{2}$	$\frac{a-b+c+d}{2}$	$\frac{a-b-c-d}{2}$

Es gilt: $\ell = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2+c^2+2cd+d^2+c^2-2cd+d^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2a^2+2b^2+2c^2+2d^2\right] = a^2+b^2+c^2+d^2$$ usw.

Daß auch durch Einsetzen dieser „nicht ganzen", ja sogar irrationalen Zahlen Matrizen mit „fast denselben 9 Zahlen" entstehen, sollte man eigentlich nachweisen, ist mir jedoch zu mühsam. (Vielleicht hast Du dazu eine gute Idee, wie man das bewerkstelligen könnte!)

Man kann nun Aufgaben zusammenstellen, indem man z. B. einen Würfel oder ein regelmäßiges Oktaeder in einfachster Aufstellung im Koordinatensystem angibt und dann alle oder auch nur einige Eckpunkte durch eine Matrix und einen Schiebevektor an eine geeignete Stelle des Raumes bringt. Auch ebene Figuren lassen sich schräg in den Raum legen und in einem geeigneten Körper „verstecken", wie bei den 4 „versetzt" aneinandergeklebten Quadern (siehe S. 22-26).

Um einen Körper in eine beliebige Raumlage zu bringen, braucht man – wie die Herleitung zeigt (S. 14) – 3 Drehungen (Drehstreckungen). Man kann diese allerdings durch eine einzige Drehstreckung um eine bestimmte Drehachse und einen einzigen Drehwinkel ersetzen. Der Richtungsvektor der Drehachse hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und der Drehwinkel φ berechnet sich aus der Formel $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{d}$:

$d > 0$: Drehung im mathematisch positiven Sinn

$d < 0$: Drehung im mathematisch negativen Sinn

$d = 0$: Drehung um $180°$

Vom gezeigten Objekt (4 „versetzt" aneinandergeklebte Quader mit quadratischer Basis: Basiskante 4 cm, Höhe 2 cm) ist auf kariertem Papier eine anschauliche Freihandskizze zu zeichnen: Frontalriß mit $\alpha_x = 45°$, Verkürzungsverhältnis etwa 0,5 : 1 : 1 [4 cm werden auf x^P auf 3 „Kästchendiagonalenlängen" verkürzt]. Folgende Punkte werden beschriftet:

A ... links oben hinten am 1. Quader; B ... rechts unten vorne am 4. Quader
C ... rechts unten vorne am 1. Quader; D ... links oben hinten am 3. Quader
E ... rechts oben vorne am 2. Quader; F ... links unten hinten am 4. Quader
E_{neu} ... links oben vorne am 3. Quader

a) Woran erkennt man schon anhand der Freihandskizze, daß AB und CD einander in einem Punkt S schneiden?

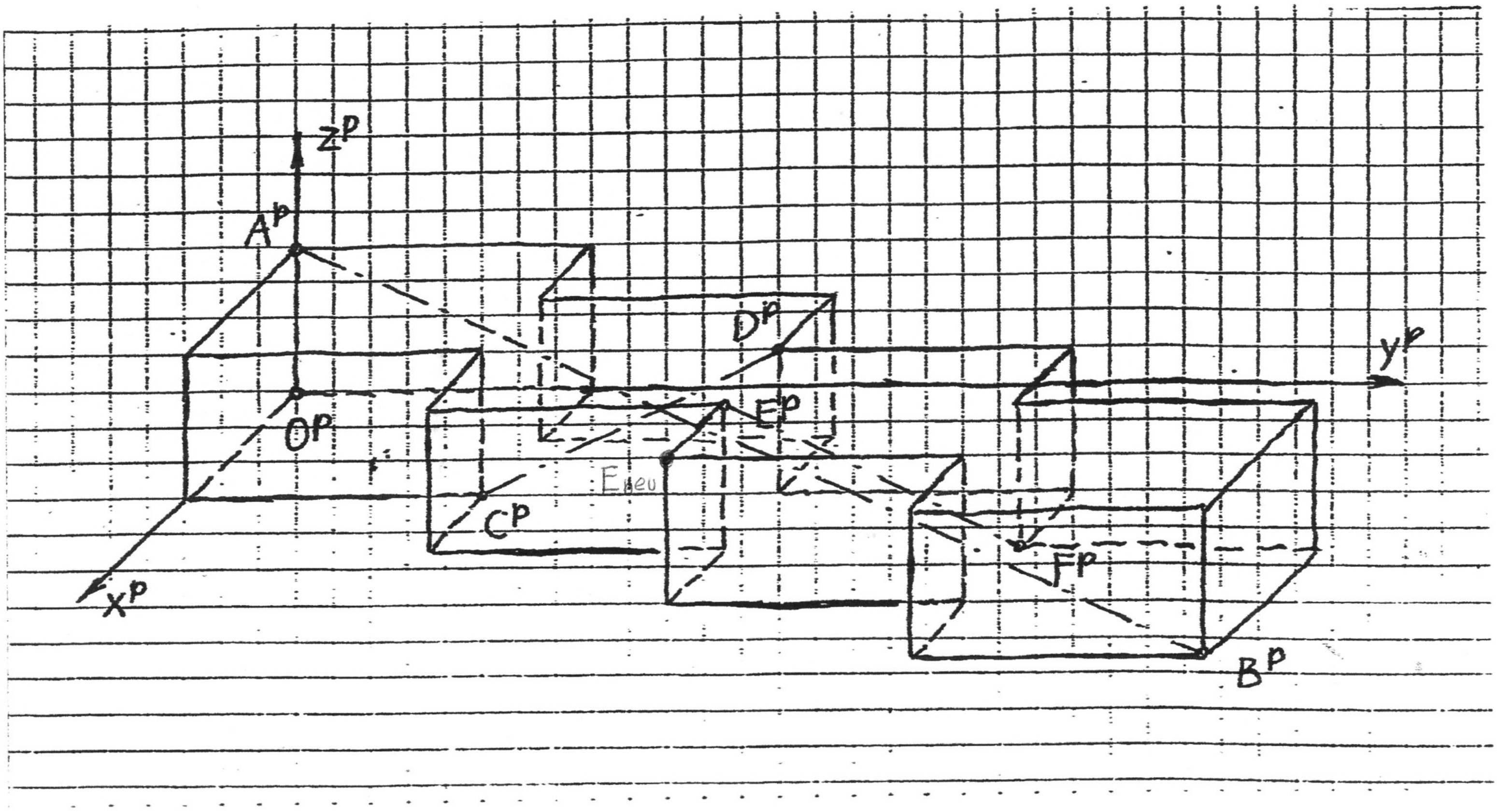
b) Woran erkennt man schon anhand der Freihandskizze, daß AB und EF weder parallel sind noch einander – möglicherweise weit draußen! – schneiden? Wie verhält es sich mit AB und $E_{neu}F$?

c) Zeichne Grund- und Aufriß des Objektes in geordneter Lage und ermittle die Größe der Winkel zwischen AB und CD bzw. zwischen AB und EF bzw. zwischen AB und $E_{neu}F$ durch Rechnung!

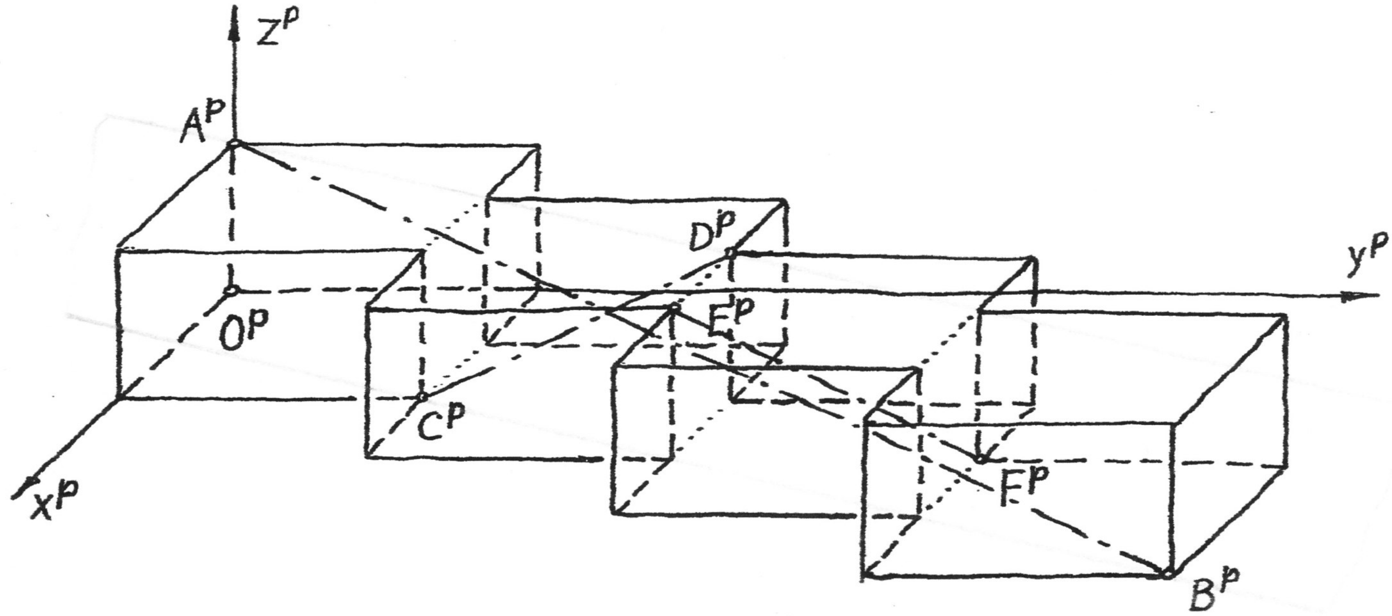
Beispiele: $y = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ $A'(1|0|0), B'(0|1|0), C'(-1|0|0), E'(0|0|1)$

(1) Gegeben ist der Streckenzug ABCE [A(9|−3|12), B(1|2|9), C(5|3|0), E(10|6|8)]. Welche von den 3 Teilstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CE}$ ist die längste? Wie lang ist sie? Welcher von den 2 Winkeln ∢ ABC und ∢ BCE – den „Knickwinkeln" – ist der größere? Wie groß ist er? Zuerst soll abgeschätzt, dann gerechnet und zuletzt veranschaulicht (und begründet!) werden.

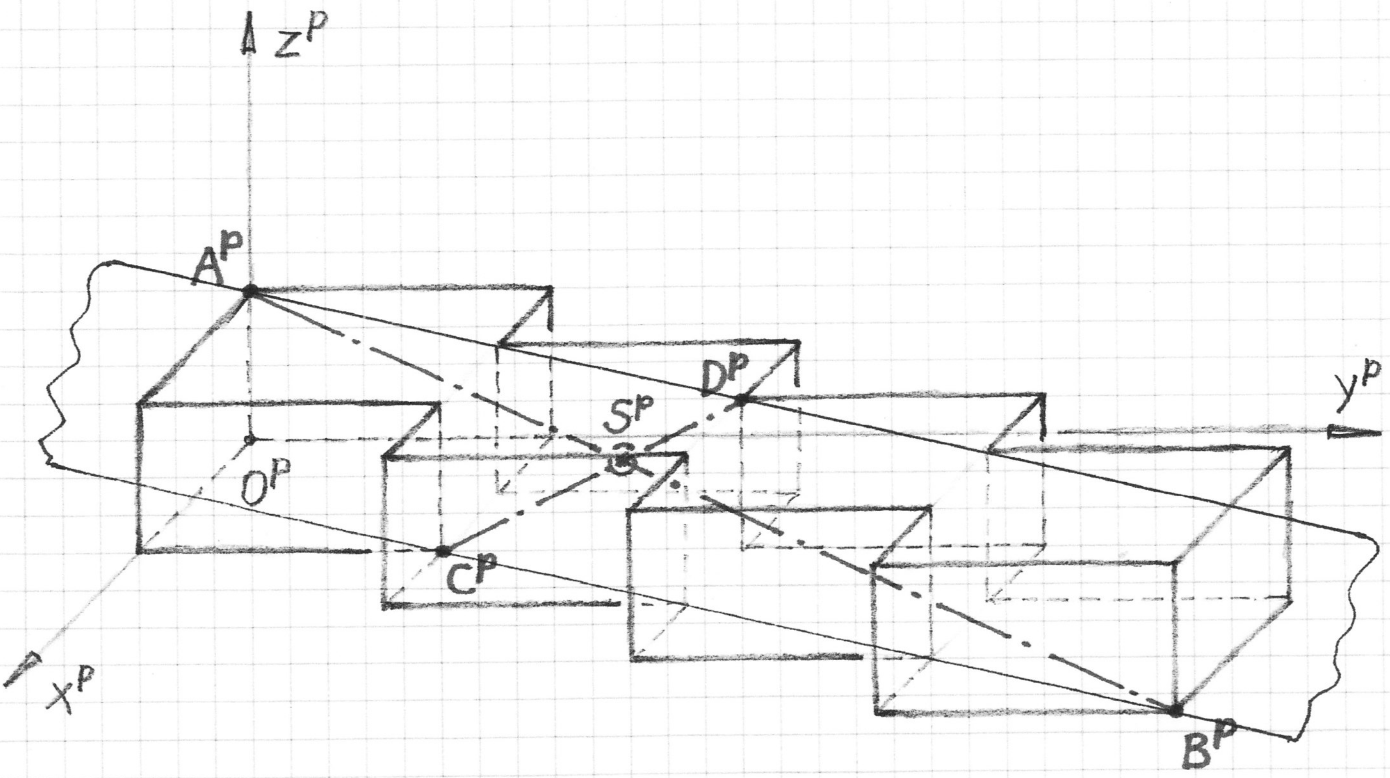
(2) Das Tetraeder ABCD [A(6,5|−7|4), B(14|−1|1), C(0|5,5|6), D(8,5|7,5|11)] ist in Grund- u. Aufriß zu zeichnen. Welche Kante liegt am höchsten oben, welche Kante liegt am weitesten vorne? Aus Zeichenkarton ist ein Modell anzufertigen. Dafür sind vorher die nötigen Berechnungen anzustellen. Anschließend sind die wesentlichen Merkmale dieses Tetraeders in Worten zu beschreiben.



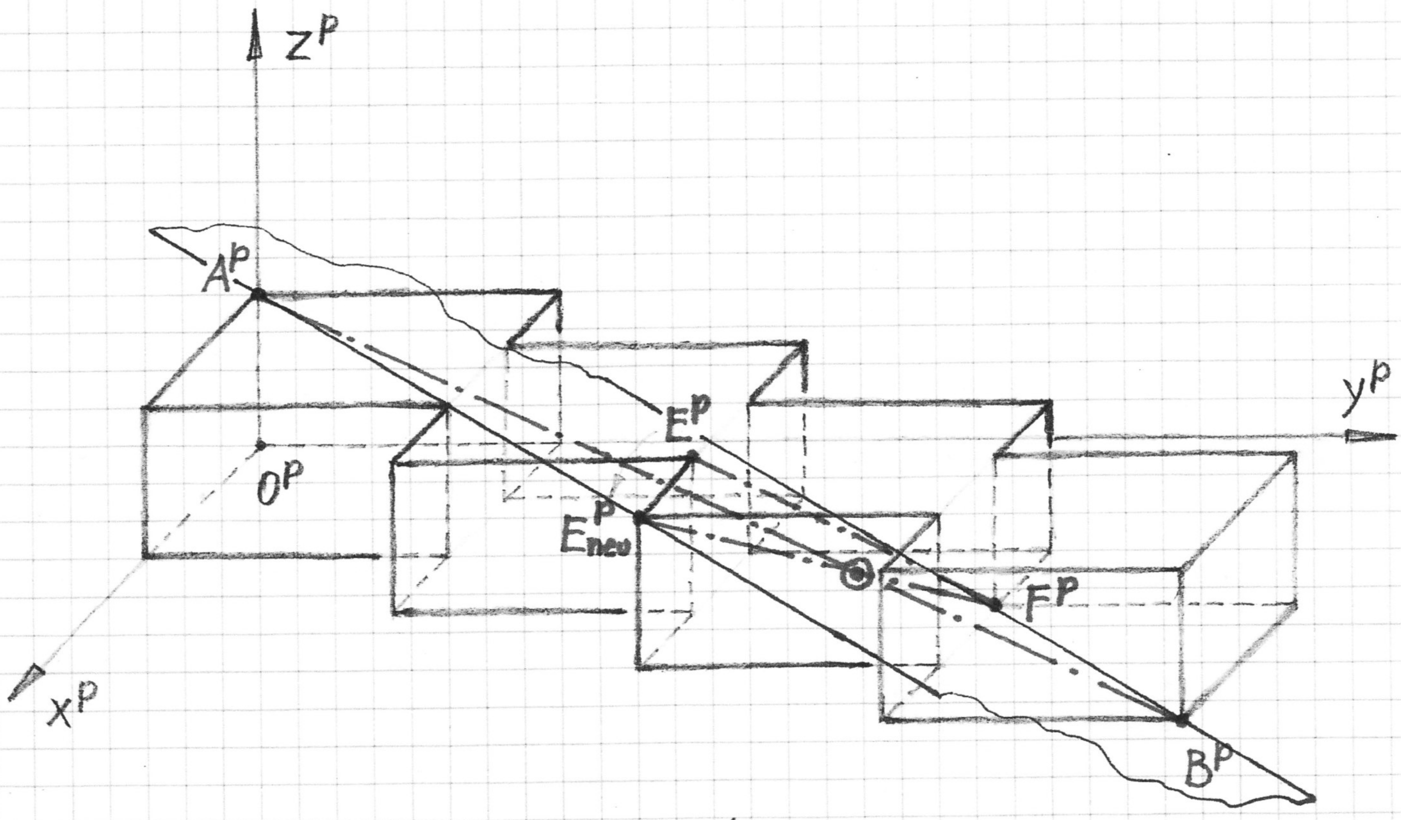
z^p
A^p
D^p
y^p
E^p
O^p
E neu
C^p
F^p
x^p
B^p



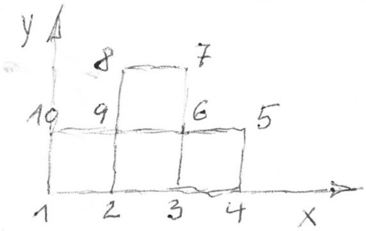
z^p
A^p
D^p
y^p
E^p
O^p
C^p
F^p
x^p
B^p



z^P
A^P
D^P
S^P
y^P
O^P
C^P
x^P
B^P



z^P
A^P
y^P
E^P
O^P
E^P_{neu}
F^P
x^P
B^P

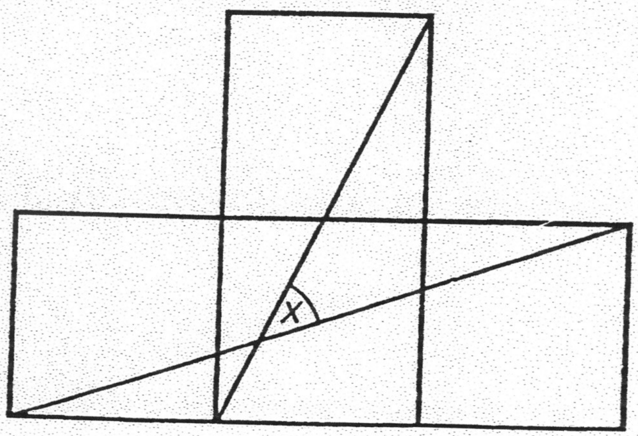


$\bar{1}(0|0|0) \to 1(0|0|2)$
$\bar{2}(1|0|0) \to 2(4|4|0)$
$\bar{5}(3|1|0) \to 5(10|16|0)$
$\bar{7}(2|2|0) \to 7(4|16|6)$

$$y = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

32

25



Vier gleiche Quadrate mit der Seite 40.

Ist Winkel x = 45°?

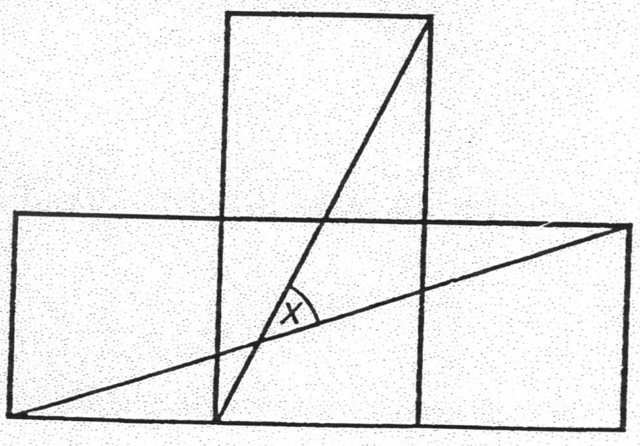
Paul Eigenmann: Geometrische Denkaufgaben, 2. Teil

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2 & 6 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2 & -6 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{matrix}$$

R R L

zykl. Vert. d. Spalten

2. Spalte ·(−1)

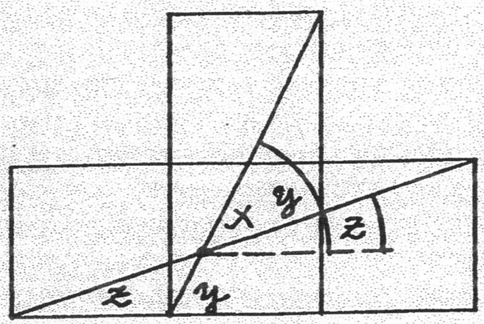


Vier gleiche Quadrate mit der Seite 40.

Ist Winkel x = 45°?

Paul Eigenmann: Geometrische Denkaufgaben, 2. Teil

1. Lösungsmöglichkeit (mit Hilfe der Trigonometrie)



$\tan y = 2 \Rightarrow y = 63{,}434949$

$\tan z = \frac{1}{3} \Rightarrow z = 18{,}434949$

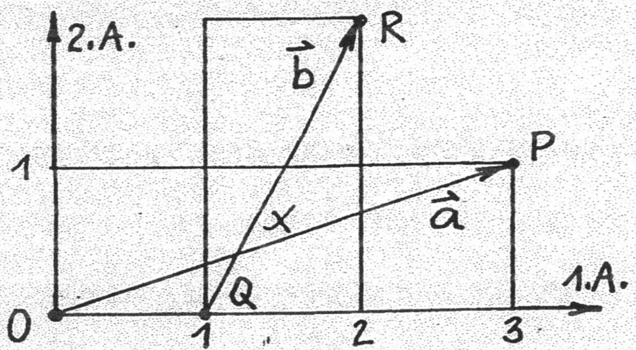
$\Rightarrow x = y - z = 45$ (Parallelwinkel!)

(mit gewissen Zweifeln an der Genauigkeit der Berechnung!)

besser wäre folgender Weg: $\tan x = \tan(y-z) = \frac{\tan y - \tan z}{1 + \tan y \cdot \tan z} =$

$$= \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = 45}} \text{ (exakt!)}$$

2. Lösungsmöglichkeit (mit Hilfe der Vektorrechnung)



$O = \binom{0}{0}$, $P = \binom{3}{1}$, $Q = \binom{1}{0}$, $R = \binom{2}{2}$

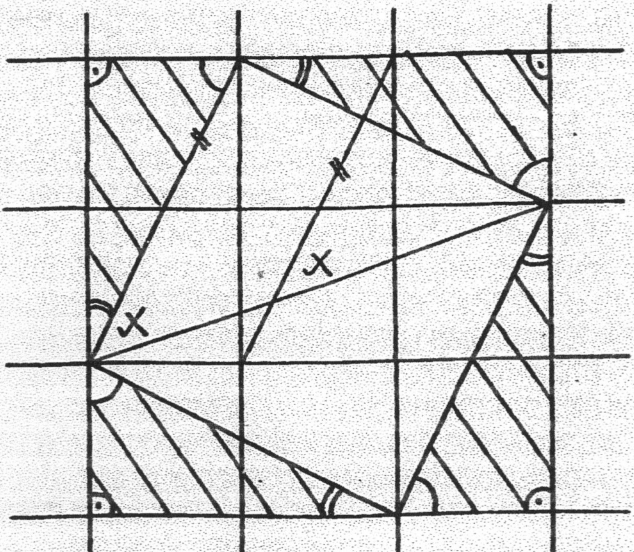
$\vec{a} = \overrightarrow{OP} = \binom{3}{1}$ $\quad \vec{b} = \overrightarrow{QR} = \binom{1}{2}$

$$\cos x = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

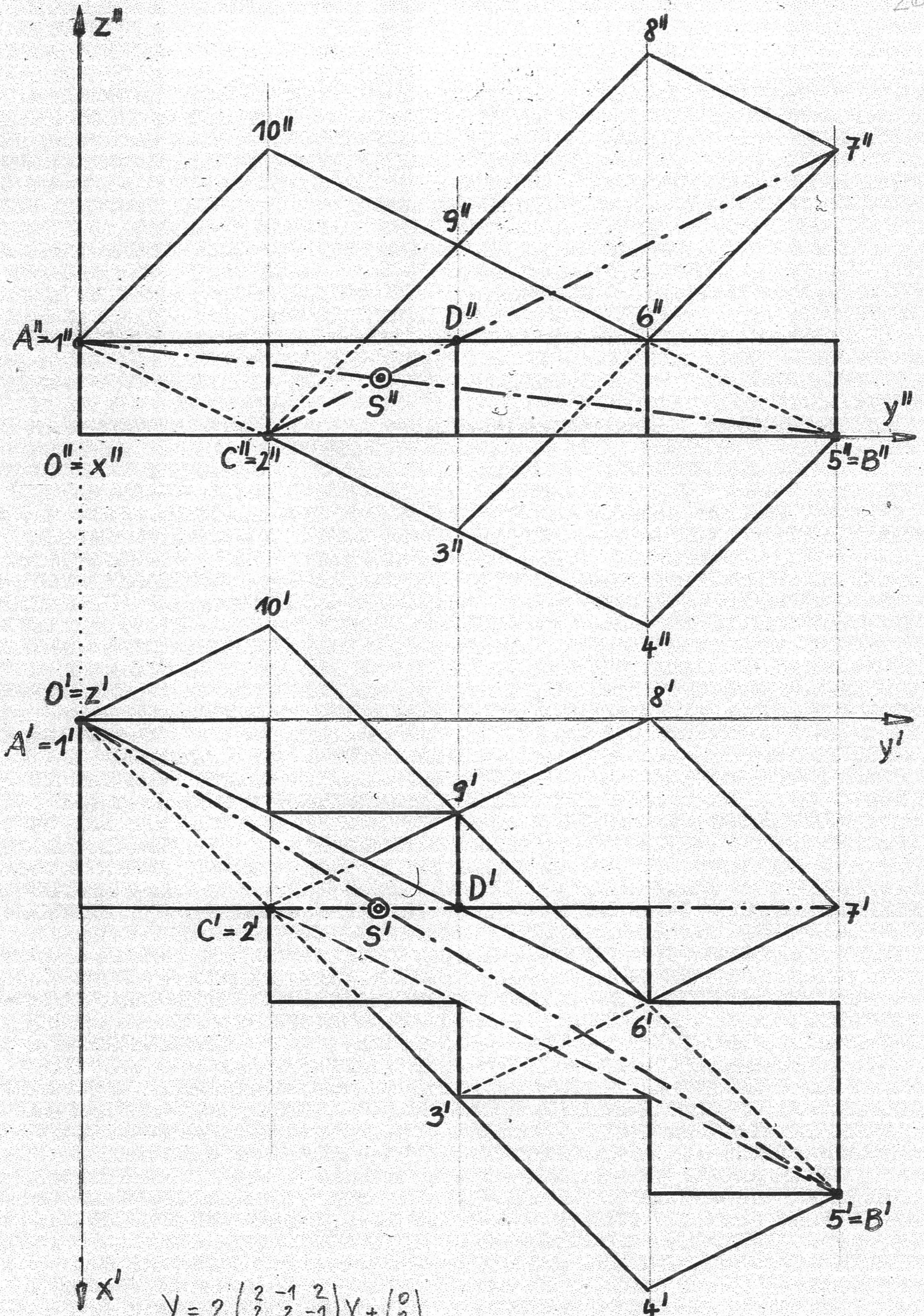
$\Rightarrow \underline{\underline{x = 45}}$ (exakt!)

Bemerkung: Die Quadratseitenlänge 30 wird als Längeneinheit angenommen (darauf kommt es also nicht an!)

3. Lösungsmöglichkeit (elementargeometrisch): „Einbetten in eine ‚karierte Umgebung'!"

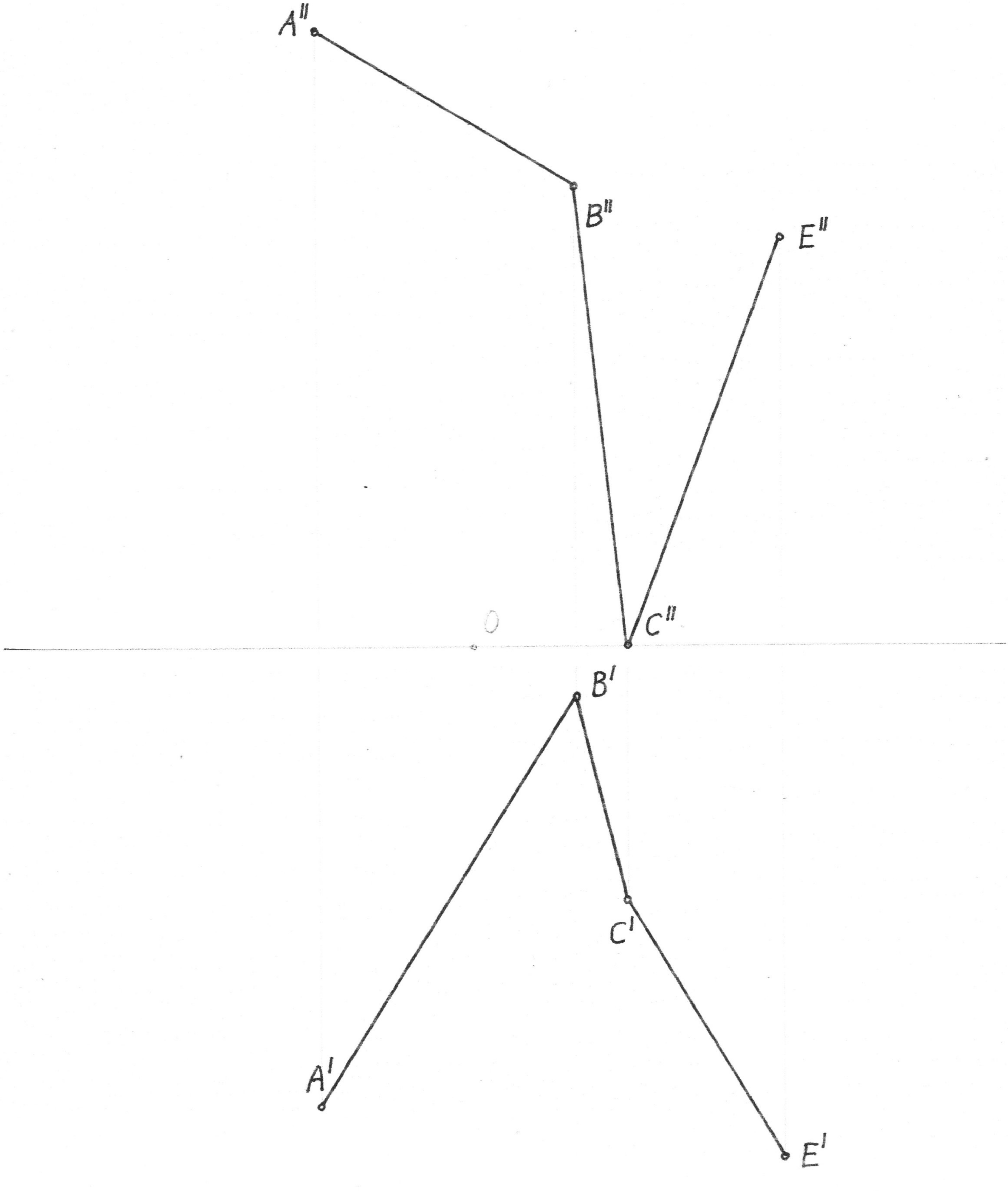


x ist die Maßzahl eines Winkels, dessen Parallelwinkel von der Seite und der Diagonalen eines Quadrates eingeschlossen wird, d.h.: $\underline{\underline{x = 45}}$ (in ° gemessen!)

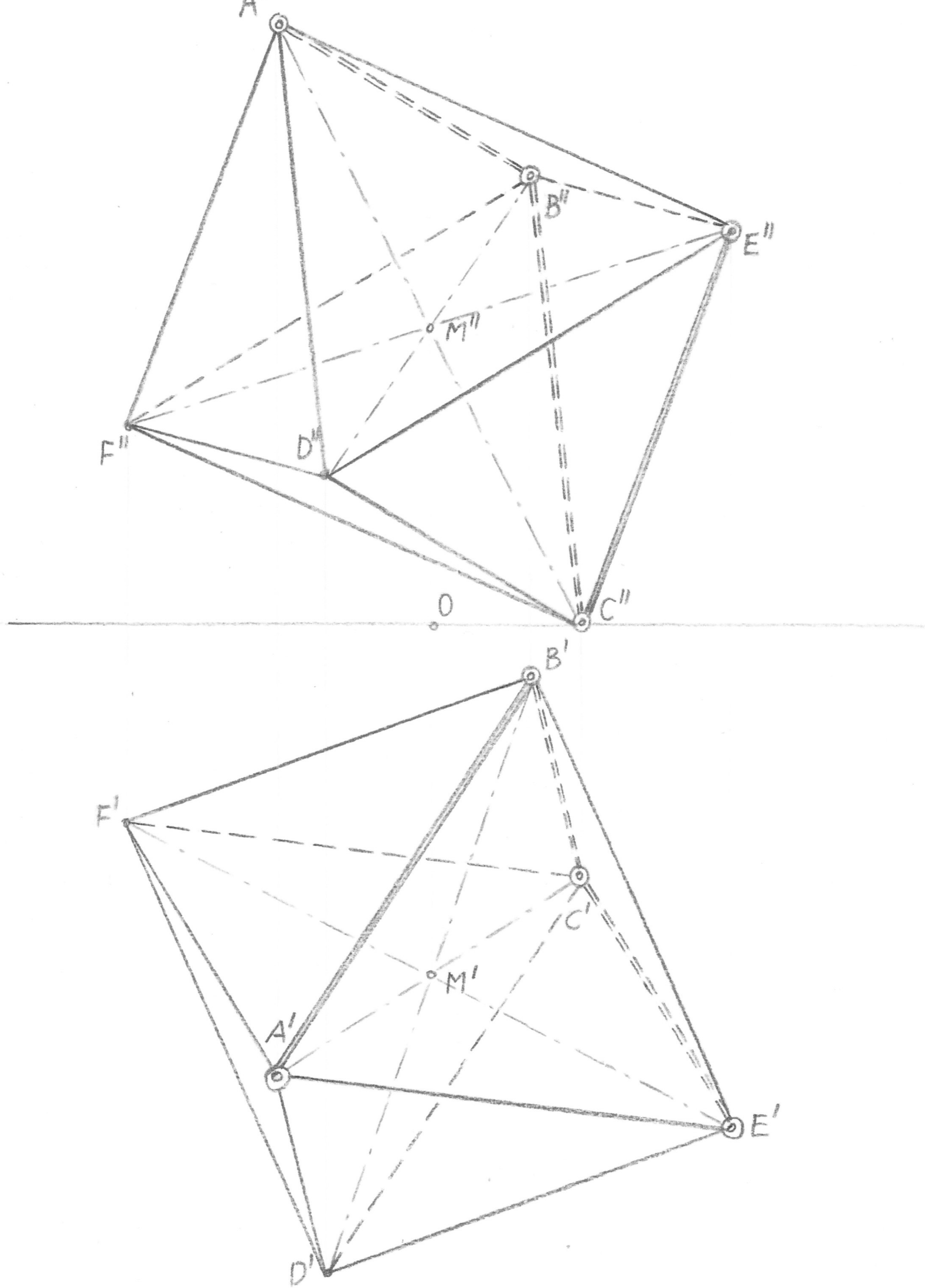


$$Y = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1)



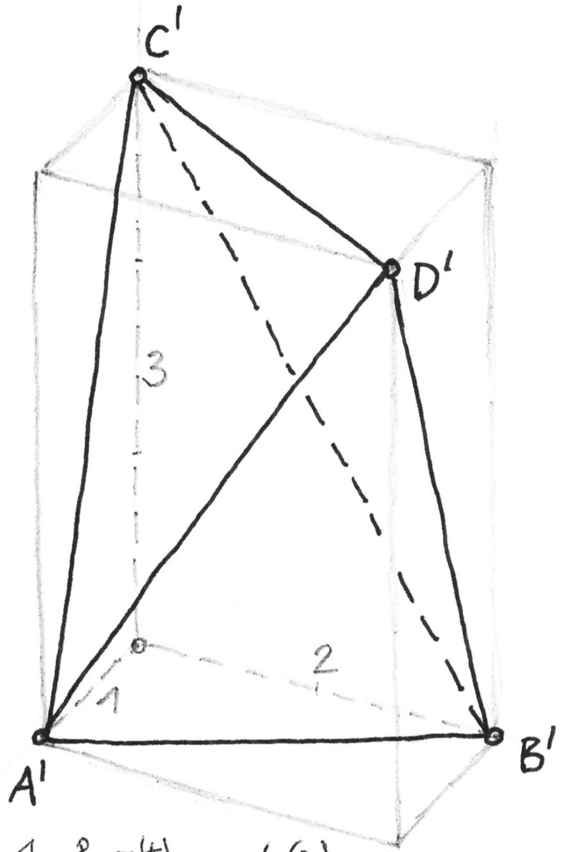
(1)



zu (2)

Geg.: Quader mit den Seitenlängen
$a=1,\ b=2,\ c=3$

$\Rightarrow$ Tetraeder mit Flächendiagonalen als Seitenlängen



$$y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

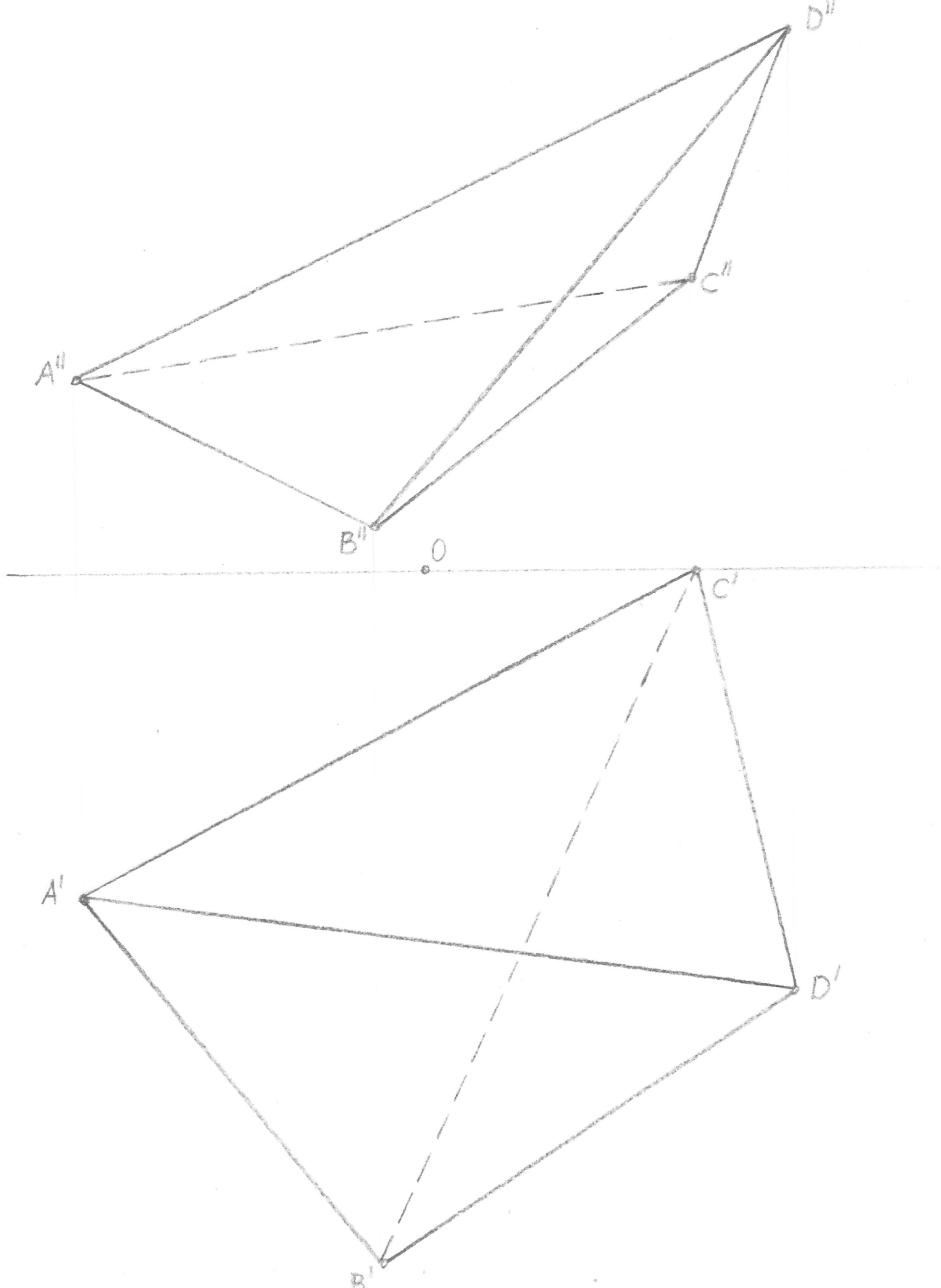
$A'(1|0|0) \Rightarrow A(6{,}5|-7|4)$

$B'(0|2|0) \Rightarrow B(14|-1|1)$

$C'(0|0|3) \Rightarrow C(0|5{,}5|6)$

$D'(1|2|3) \Rightarrow D(8{,}5|7{,}5|11)$

(2)



Weitere Beispiele:

1) Auf welche Weise kann man durch Rechnung begründen, daß das Dreieck AGC [A(10|−3|3), G(3|4|10), C(1|1|4)] von einer Raumdiagonalen, einer Seitenkante und einer Seitenflächendiagonalen eines Würfels gebildet wird? Die Rechnung ist durchzuführen. Daranschließend ist der Würfel in Grund- und Aufriß darzustellen.

2) Es ist durch Rechnung zu begründen, daß das Dreieck ABH [A(1|−6|3), B(4|6|0), H(6,5|1|9,5)] als Symmetrieschnitt eines regelmäßigen Tetraeders aufgefaßt werden kann. Das Tetraeder ist in Grund- und Aufriß darzustellen. Abschließend sind die Koordinaten der beiden restlichen Eckpunkte C und D der Zeichnung zu entnehmen und durch Rechnung zu kontrollieren.

3) Das Hexaeder ABCDE [A(10|−8|10), B(10|1|10), C(1|−8|10), D(10|−8|1), E(4|−2|4)] – gemeint ist ein von den 6 Dreiecken ABC, ACD, ABD, BCE, CDE, BDE begrenzter Körper – ist in Grund- und Aufriß darzustellen. Anschließend ist mit Hilfe eines Seitenrisses eine etwas allgemeinere Ansicht des Körpers anzufertigen. Durch Zeichnung und erforderlichenfalls auch durch Rechnung sind genauere Details des Körpers zu bestimmen. Abschließend sind die wesentlichen Merkmale des Körpers in Worten zu beschreiben.

4) Gegeben ist der Streckenzug ABCD [A(4,5|−5|6), B(7|0,5|4), C(1|−1|2,5), D(2,5|5|4)]. Mit Hilfe der Zeichnung und anschließend exakt durch Berechnung ist zu zeigen, daß die 3 Teilstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ gleich lang und die Winkel ∢ABC und ∢BCD genau 60° sind. Warum kann trotz dieser Eigenschaften der Streckenzug ABCD <u>nicht</u> als Aufeinanderfolge dreier Kanten eines regelmäßigen Tetraeders oder regelmäßigen Oktaeders aufgefaßt oder gedeutet werden? Gib einen Grund dafür an!

5) Gegeben sind die beiden Streckenzüge $ABCD_1$ $[A(3|-5|5)$, $B(3|-0{,}5|9{,}5)$, $C(1{,}5|1|3{,}5)$, $D_1(5|5|7)]$ und $ABCD_2$ $[D_2(7|3|6)]$. Zeige durch Rechnung, daß beide Streckenzüge aus gleich langen Teilstrecken zusammengesetzt sind und die Winkel an den Knickstellen jeweils exakt 60° betragen. Kann einer von den beiden Streckenzügen als Aufeinanderfolge von 3 Kanten eines regelmäßigen Oktaeders aufgefaßt werden? Begründe deine Meinung! Wenn ja, so stelle das regelmäßige Oktaeder in Grund- und Aufriß dar.

„Drehmatrix" (allgemeine Gestalt):

$$M = \frac{1}{\ell}\begin{pmatrix} 2(a^2+d^2)-\ell & 2(ab-cd) & 2(ac+bd) \\ 2(ab+cd) & 2(b^2+d^2)-\ell & 2(bc-ad) \\ 2(ac-bd) & 2(bc+ad) & 2(c^2+d^2)-\ell \end{pmatrix} \quad \text{mit } \ell = a^2+b^2+c^2+d$$

---

zu 1) $\overline{CG} = 7$, $\overline{AC} = 7\sqrt{2}$, $\overline{AG} = 7\sqrt{3}$ restliche Würfelecken:
$B(7|3|1)$, $D(4|-5|6)$, $E(12|0|9)$, $F(9|6|7)$, $H(6|-2|12)$

---

zu 2) $\overline{AB} = 9\sqrt{2}$; $\overline{AH} = \overline{BH} = \frac{9}{2}\sqrt{6} = \overline{AB}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ restliche Ecken:
$C(12|-1|7)$, $D(1|3|12)$

---

zu 3) Der Körper wird begrenzt durch 6 kongruente gleichschenkelig-rechtwinkelige Dreiecke.

---

zu 4) Notwendige Bedingung für regelm. Tetraeder mit Seitenkantenlänge a: $\overline{AD} = 0$ oder $\overline{AD} = a$

Notwendige Bedingung für regelm. Oktaeder mit Seitenkantenlänge a: $\overline{AD} = 0$ oder $\overline{AD} = a\sqrt{2}$

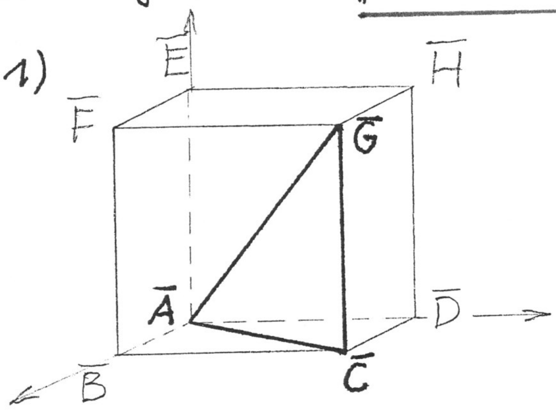
Es gilt hier aber: $\overline{AD} = a\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}$, also ist die notwendige Bedingung nicht erfüllt!

---

zu 5) $\overline{AD_1} = a\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}$, $\overline{AD_2} = a\sqrt{2}$ (!) Diese Bedingung ist aber nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend – wie man leicht überlegt! Oktaedermittelpunkt $M(5|-1|5{,}5)$

Anmerkungen zu den „weiteren Beispielen“:

zu 1)



$a=0,\ b=\frac{1}{\sqrt2},\ c=\frac{3}{\sqrt2},\ d=\frac{2}{\sqrt2}$

$$y=\begin{pmatrix}-3&-6&2\\6&-2&3\\-2&3&6\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}10\\-3\\3\end{pmatrix}$$

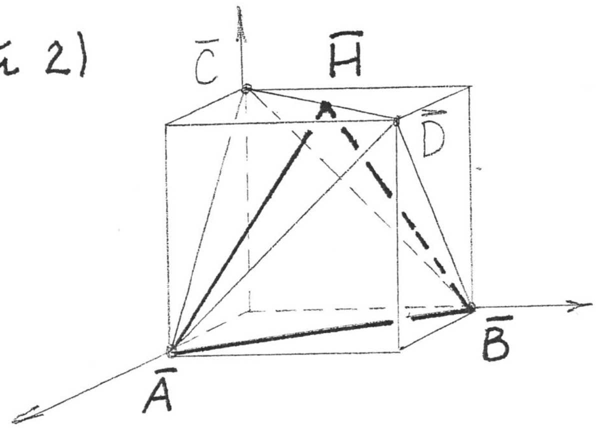
$\bar A(0|0|0),\ \bar C(1|1|0),\ \bar G(1|1|1)$

$A(10|-3|3),\ C(1|1|4),\ G(3|4|10)$

Drehachsenvektor: $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$, Drehwinkel: $\varphi = 115°22'37''$ ($\tan\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$)

Streckfaktor: 7

zu 2)



$a=\frac12,\ b=-\frac12,\ c=\frac32,\ d=-\frac52$

$$y=\begin{pmatrix}4&7&4\\-8&4&1\\-1&-4&8\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$$

$\bar A(1|0|0),\ \bar B(0|1|0),\ \bar H(0{,}5|0{,}5|1)$

$A(1|-6|3),\ B(4|6|0),\ H(6{,}5|1|9{,}5)$

Drehachsenvektor: $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$, Drehwinkel: $\varphi = -67°06'53''$ ($\tan\frac{\varphi}{2}=-\frac{\sqrt{11}}{5}$)

Streckfaktor: 9

zu 3) Der Körper wird begrenzt von 6 kongruenten gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreiecken (2 aufeinandergeklebte Würfelecken)

zu 4)

$$y=\frac12\cdot\begin{pmatrix}4&-8&-1\\7&4&-4\\4&1&8\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$\bar A(0|0|1),\ \bar B(1|0|0),\ \bar C(0|1|0),\ \bar D(\frac43|\frac43|-\frac13)$

$A(4{,}5|-5|6),\ B(7|0{,}5|4),\ C(1|-1|2{,}5),\ D(2{,}5|5|4)$

zu 5)

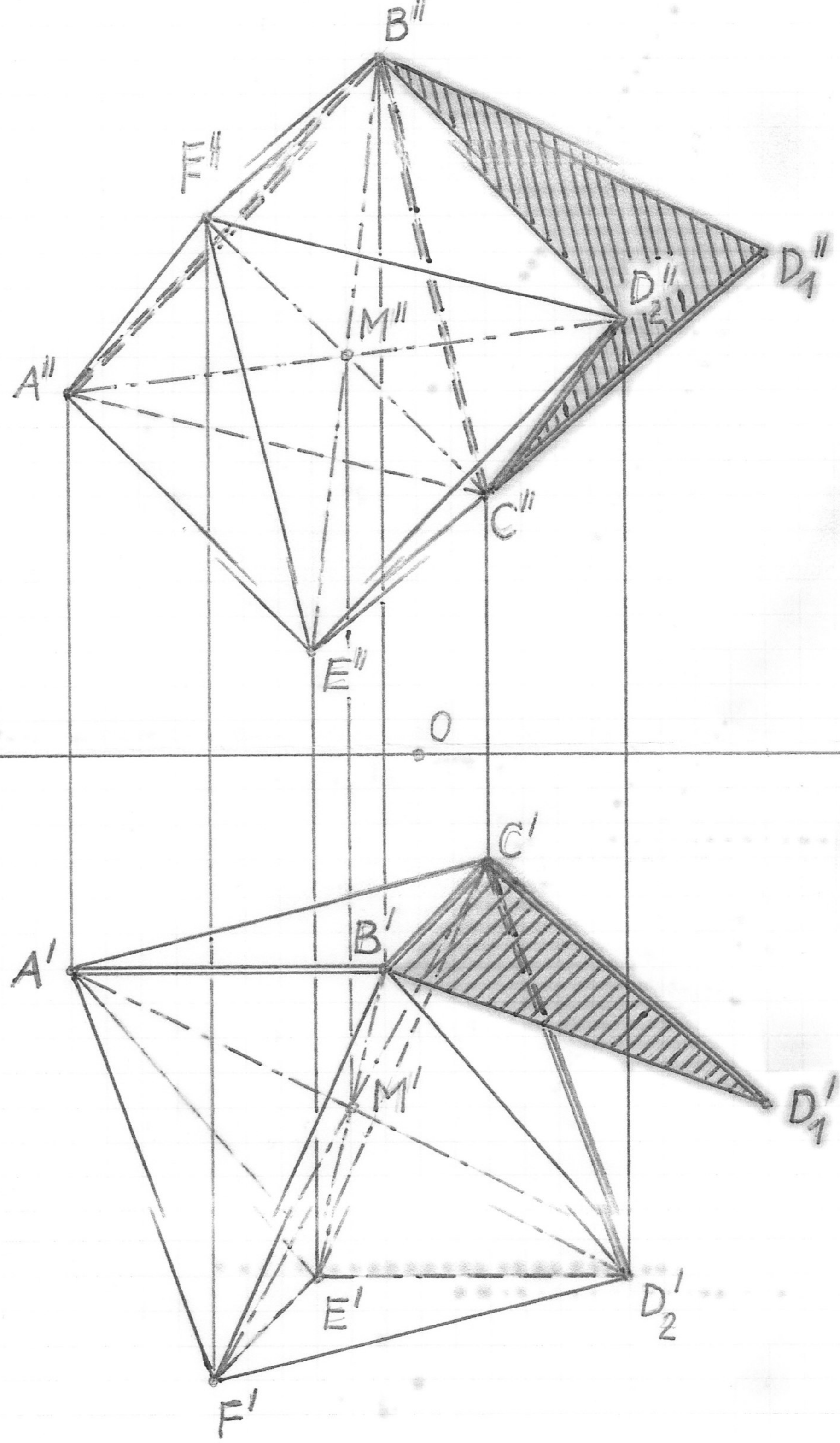
$$y = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 & -7 \\ -8 & 1 & 4 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$$

$\bar{A}(1|0|0)$, $\bar{B}(0|1|0)$, $\bar{C}(0|0|1)$, $\bar{D}_1(-\frac{11}{9}|\frac{4}{9}|\frac{4}{9})$, $\bar{D}_2(-1|0|0)$

$A(3|-5|5)$, $B(3|-0{,}5|9{,}5)$, $C(1{,}5|1|3{,}5)$, $D_1(5|5|7)$, $D_2(7|3|6)$

Weitere Aufgaben könnten wir bei gegebener Gelegenheit noch besprechen, vielleicht bei der Mathematik-Tagung nach Ostern.

Vom 27.2. bis 20.3.2018 bin ich nun auf Rehabilitation im RZ Engelsbad, 2500 Baden, Weilburgstraße 7-9. Eventuell ergibt sich in dieser Zeit eine Möglichkeit für einen (zumindest telefonischen) Kontakt.


B''
F''
M''
A''
D_2''
D_1''
C''
E''
O
C'
B'
A'
M'
D_1'
E'
D_2'
F'

Fortsetzung von S. 21

Beispiel: Setzt man $a=\frac{5}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{11}{2}$, $d=\frac{9}{2}$, so erhält man die Matrix $\begin{pmatrix} -4 & -52 & 23 \\ 47 & -16 & -28 \\ 32 & 17 & 44 \end{pmatrix}$. Diese Matrix vermittelt eine Drehung um eine Drehachse mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$, mit dem Drehwinkel $\varphi = 106°49'35''$ ($\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{9}$) und einer Streckung mit dem Faktor 57.

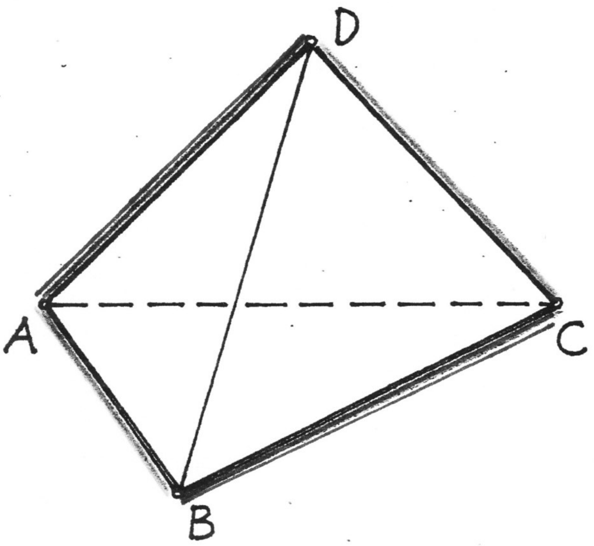
EULER dürfte vor rund 280 Jahren dies alles bereits gewußt haben. Wie er dies ohne Vektoren und Matrizen herausgebracht hat, ist mir ein Rätsel. Seine Abhandlung trägt den Titel „Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile".

Ich muß den Brief nun schließen, sonst finde ich nie ein Ende. Verzeihe mir die verspätete und unzureichende Antwort auf Dein Telefonat. Es grüßt Dich herzlich

Gerhard

P.S.: Das Folgende steht mit dem Obigen in keinem Zusammenhang, ist aber trotzdem – wie ich glaube – interessant.

G.



Wenn eine dreiseitige Pyramide (= Tetraeder) zwei Paare normaler Gegenkanten besitzt, dann sind stets auch die zwei Gegenkanten des dritten Paares zueinander normal.

Beweis (= Begründung):

Voraussetzung ist also z.B. $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, d.h.:

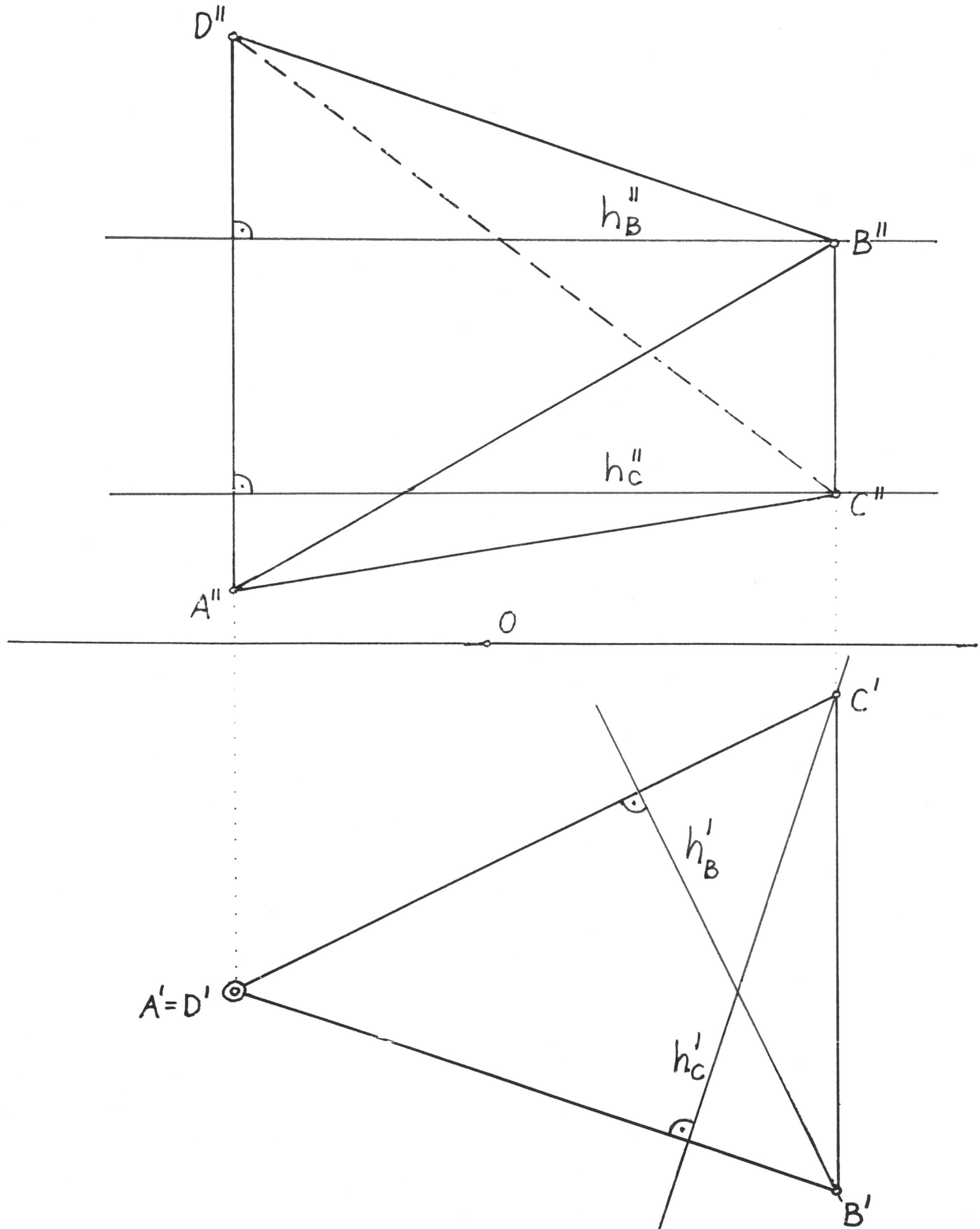
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 &\Rightarrow (D-A)\cdot(C-B) = 0 \Rightarrow C\cdot D - A\cdot C - B\cdot D + A\cdot B = 0 \\
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 &\Rightarrow (B-A)\cdot(D-C) = 0 \Rightarrow B\cdot D - A\cdot D - B\cdot C + A\cdot C = 0 \quad + \\
& \qquad C\cdot D - A\cdot D - B\cdot C + A\cdot B = 0 \quad !!! \\
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 &\Leftarrow (C-A)\cdot(D-B) = 0 \Leftarrow D\cdot(C-A) - B\cdot(C-A) = 0 \\
&\Downarrow \\
\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} & \qquad \text{w.z.b.w.}
\end{aligned}$$

Zusammenfassung:

Es gibt 3 Typen von dreiseitigen Pyramiden (Tetraedern):

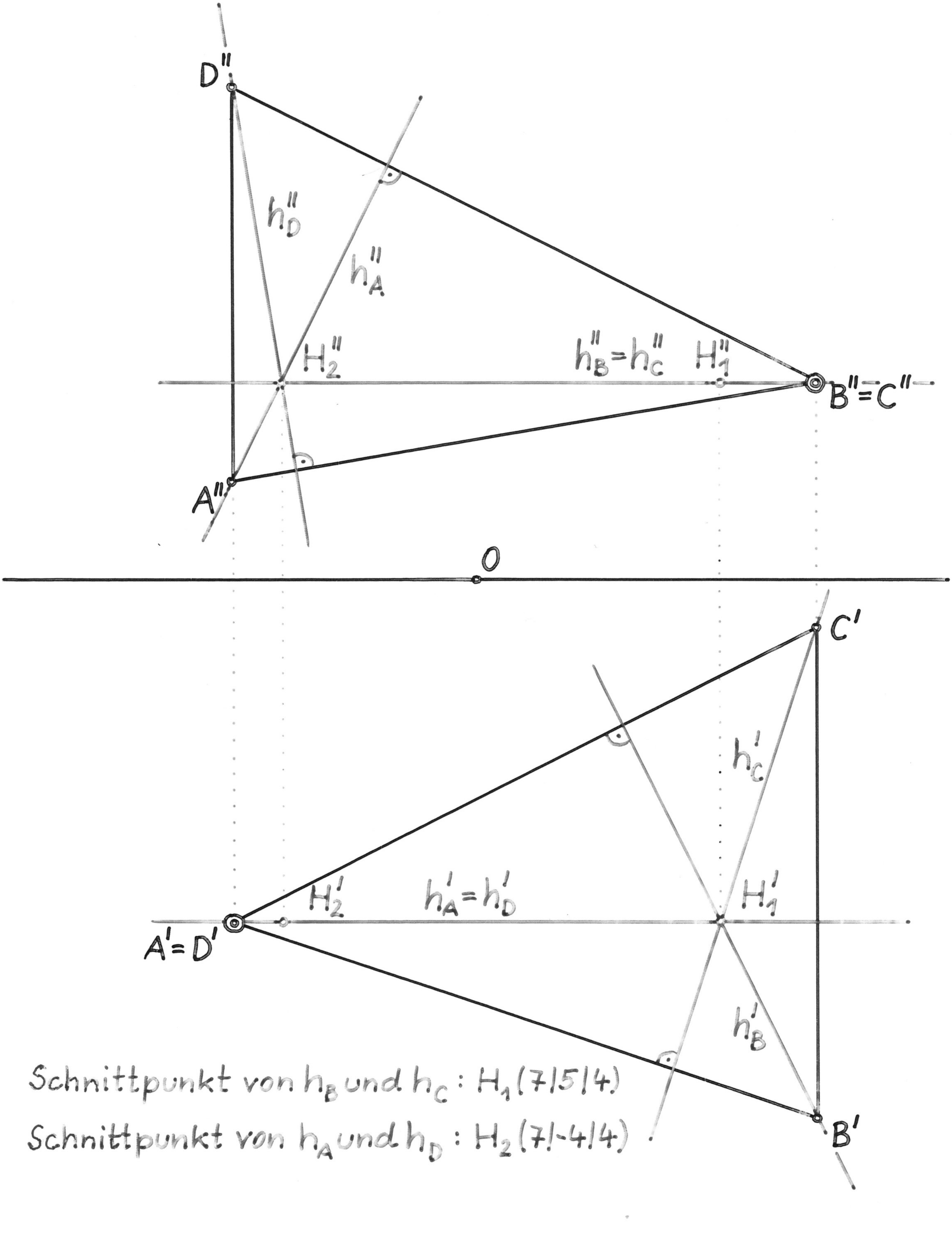
1. Typ (= allgemeiner Fall): kein Paar normaler Gegenkanten
   Die Höhen dieses Typs sind stets paarweise windschief.
2. Typ: genau 1 Paar normaler Gegenkanten
   Bei diesem 2. Typ schneiden einander jene Höhen, welche durch die Endpunkte einer Kante des normalen Gegen=kantenpaares gehen; es gibt deshalb 2 voneinander verschiedene Höhenschnittpunkte H_1 und H_2.
3. Typ: 3 Paare normaler Gegenkanten (wie oben gezeigt gibt es kein Tetraeder mit genau 2 Paaren normaler Gegenkanten)
   Die 4 Höhen haben einen einzigen Höhenschnittpunkt H.

Tetraeder ABCD: $A(7|-5|1)$, $B(11|7|8)$, $C(1|7|3)$, $D(7|-5|12)$



AD erstprojizierend; gegenüberliegende Kante in dritter Hauptlage, wobei B und C verschieden hoch liegen $\Rightarrow$ h_B, h_C sind <u>windschief</u>!

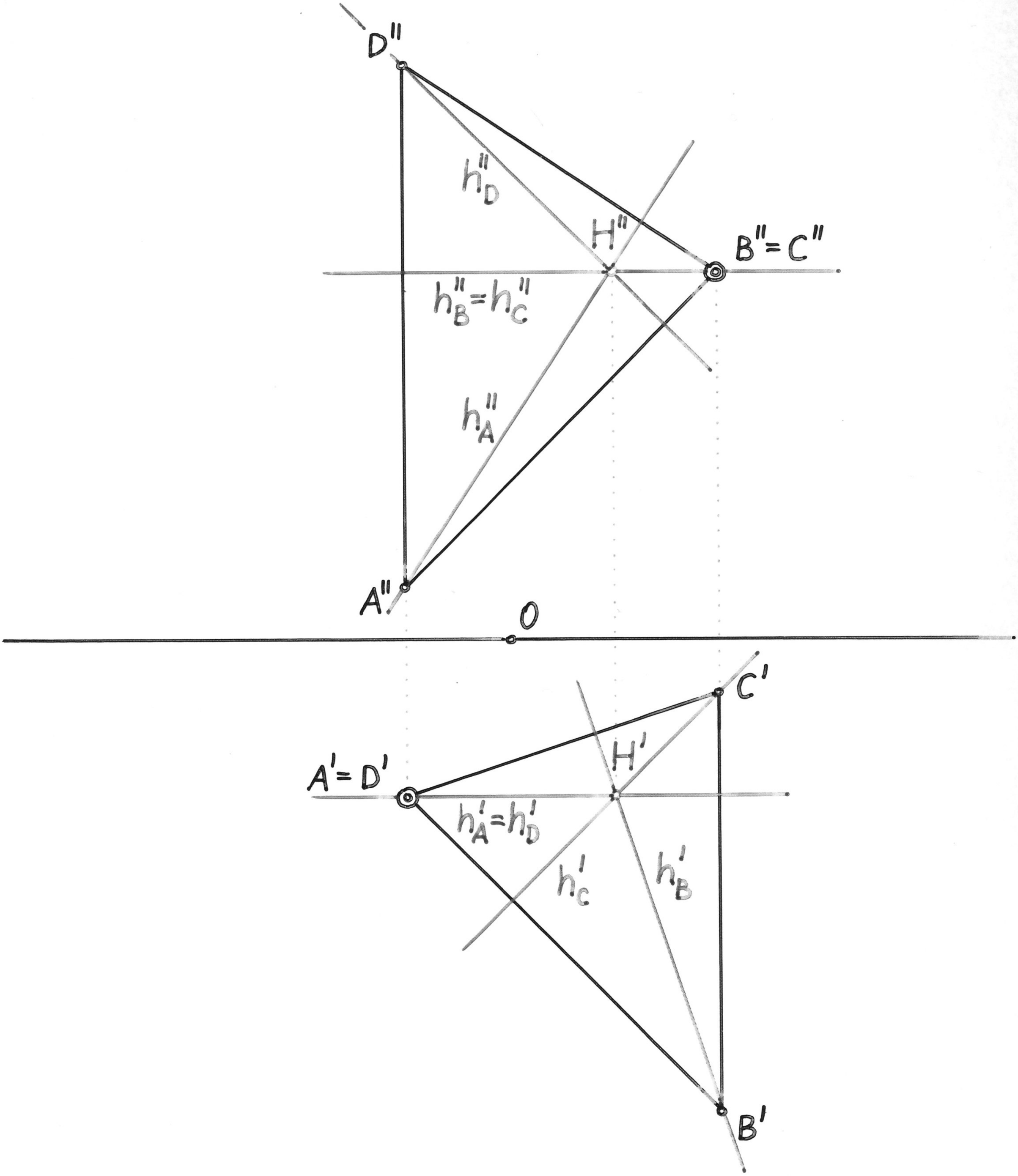
Tetraeder ABCD : A(7|-5|2), B(11|7|4), C(1|7|4), D(7|-5|10)



Schnittpunkt von h_B und h_C : $H_1(7|5|4)$

Schnittpunkt von h_A und h_D : $H_2(7|-4|4)$

Tetraeder ABCD : A(3|-2|1), B(9|4|7), C(1|4|7), D(3|-2|11)



Höhenschnittpunkt H(3|2|7)

Tetraeder ABCD : A(7|-5|2), B(11|7|4), C(1|7|4), D(7|-5|10)

genau 1 Paar normaler Gegenkanten

$$h_A: X = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h_B: X = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ für } s = -2,\ t = 2$$

$$h_C: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ für } r = 1,\ u = 1$$

$$h_D: X = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Tetraeder ABCD : A(3|-2|1), B(9|4|7), C(1|4|7), D(3|-2|11)

3 Paare normaler Gegenkanten

$$h_A: X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h_B: X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ für } r = 2,\ s = -2,\ t = 2,\ u = 4$$

$$h_C: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_D: X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$